

mm

PODRECZNIKI AKADEMICKIE • MECHANIKA

**Michał E. Niezgodziński
Tadeusz Niezgodziński**



zadania z wytrzymałości materiałów

Wydawnictwa Naukowo-Techniczne



PODRĘCZNIKI AKADEMICKIE • MECHANIKA

**zadania
z wytrzymałości
materiałów**

Michał E. Niezgodziński
Tadeusz Niezgodziński

zadania z wytrzymałości materiałów

wydanie drugie
poprawione



Wydawnictwa Naukowo-Techniczne • Warszawa

Spis treści

	Przedmowa do wydania pierwszego	7
	Przedmowa do wydania drugiego	8
1.	Statycznie wyznaczalne przypadki rozciągania – ściskania prętów	9
2.	Statycznie niewyznaczalne przypadki rozciągania – ściskania prętów	18
3.	Analiza naprężeń i odkształceń	43
4.	Ścinanie	56
5.	Skręcanie wałów, okrągłych. Sprężyny śrubowe	63
6.	Skręcanie prętów cienkościennych	72
7.	Momenty bezwładności figur płaskich	79
8.	Zginanie statycznie wyznaczalnych belek i ram	87
9.	Hipotezy wyężeniowe. Wytrzymałość złożona	102
10.	Linie ugięcia belek	116
11.	Wyboczenie	131
12.	Belki i ramy statycznie niewyznaczalne	139
13.	Belki na sprężystym podłożu	153

14.	Pręty silnie zakrzywione	159
15.	Twierdzenie Castigliana. Układy statycznie wyznaczalne	164
16.	Twierdzenie Menabrei. Układy statycznie niewyznaczalne	174
17.	Wzór i równania Maxwella-Mohra	190
18.	Płyty kołowsymetryczne	197
19.	Rury i zbiorniki ciśnieniowe	205
20.	Zagadnienia dynamiczne	218
21.	Tablice dodatkowe	231

Statycznie wyznaczalne przypadki rozciągania – ściskania prętów

1

Wprowadzenie

Naprężenia rozciągające σ , normalne do przekroju poprzecznego w pręcie rozciągany siłą P , określone są wzorem

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq k_r \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (1.1)$$

gdzie: F – pole przekroju poprzecznego pręta, m^2 ; k_r – naprężenie dopuszczalne na rozciąganie.

Zgodnie z obowiązującymi normami jednostką naprężenia w układzie SI jest paskal (Pa), czyli niuton (N) na metr kwadratowy (m^2). Ponieważ jest to jednostka bardzo mała (do zastosowań w budowie maszyn), przeto w praktyce stosuje się megapaskal (MPa)

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Wydłużenie Δl pręta przyrównanego o długości l wyznacza się z prawa Hooke’a

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} \quad (1.2)$$

gdzie E – moduł Younga (tabl. 21.1).

Po wprowadzeniu wydłużenia względnego (odkształcenia) ε

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (1.3)$$

prawo Hooke’a wyraża się wzorem

$$\sigma = \varepsilon E \quad (1.4)$$

Analogiczne wzory stosuje się przy ściskaniu prętów, z tym zastrzeżeniem, że są to pręty krótkie, nie podlegające wyboczeniu.

Zadanie 1.1. Pręt stalowy o średnicy $d = 5 \text{ mm}$ i długości $l = 2 \text{ m}$ jest rozciągany siłą $P = 1600 \text{ N}$. Obliczyć naprężenia oraz wydłużenie całkowite i względne pręta. Moduł Younga dla stali wynosi $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Rozwiązanie. Naprężenia normalne w poprzecznym przekroju pręta wynoszą

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 1600}{\pi \cdot 5^2} = 81,5 \text{ N/mm}^2 = 81,5 \text{ MPa}$$

a wydłużenie całkowite (z prawa Hooke'a)

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} = \frac{4Pl}{E\pi d^2} = \frac{4 \cdot 1600 \cdot 2000}{2,1 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 5^2} = 0,78 \text{ mm}$$

Zadanie 1.2. Obliczyć naprężenia normalne w przekroju poprzecznym, wydłużenie całkowite oraz wydłużenie względne drutu mosiężnego, o długości $l = 4 \text{ m}$ i średnicy $d = 3 \text{ mm}$, rozciąganego siłą $P = 700 \text{ N}$. Moduł Younga dla miedzi $E = 1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ można odczytać z tabl. 21.1.

ODPOWIEDŹ:

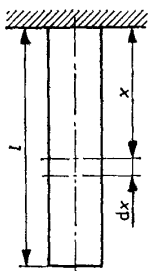
$$\sigma = 100 \text{ MPa}, \quad \varepsilon = 0,001, \quad \Delta l = 4 \text{ mm}$$

Zadanie 1.3. Tensometr (czujnik do pomiaru odkształceń) wykazał odkształcenie względne rozciąganego pręta aluminiowego $\varepsilon = 0,5\text{‰} = 0,0005$. Obliczyć naprężenia, z jakimi był rozciągany pręt, jeżeli moduł Younga dla aluminium wynosi $E = 0,7 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.

Rozwiązanie:

$$\sigma = \varepsilon E = 0,0005 \cdot 0,7 \cdot 10^5 = 35 \text{ N/mm}^2 = 35 \text{ MPa}$$

Zadanie 1.4. Obliczyć wydłużenie wywołane ciężarem własnym pręta pryzmatycznego (rys. 1.1) o długości l , wykonanego z materiału o ciężarze właściwym γ i module Younga E .



Rys. 1.1. Do zadania 1.4

Rozwiązanie. Wytnijmy z pręta odcinek o długości dx oddalony o x od górnego końca pręta. Odcinek ten jest rozciągany siłą równą ciężarowi pręta o długości $l - x$, a więc $Q_x = F(l - x)\gamma$.

Wydłużenie odcinka dx wynosi (z prawa Hooke'a)

$$\Delta x = \frac{Q_x dx}{EF} = \frac{F(l-x)\gamma dx}{EF} = \frac{(l-x)\gamma dx}{E}$$

Całkowite wydłużenie pręta jest równe

$$\Delta l = \int_0^l \Delta x = \int_0^l \frac{\gamma}{E}(l-x) dx = -\frac{\gamma}{E} \left| \frac{(l-x)^2}{2} \right|_0^l = \frac{\gamma l^2}{2E}$$

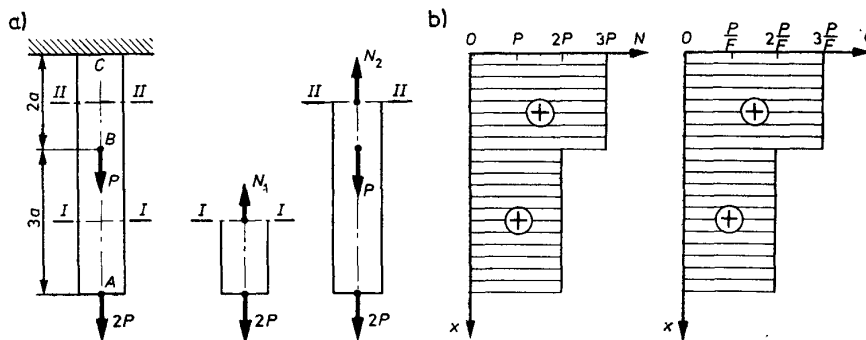
Wydłużenie to jest równe wydłużeniu wywołanemu siłą równą ciężarowi pręta, przyłożoną w środku ciężkości pręta.

Zadanie 1.5. Jakiej długości pręt – swobodnie zawieszony – nie zerwie się jeszcze pod ciężarem własnym, jeżeli masa właściwa (gęstość) pręta wynosi ρ , zaś wytrzymałość na rozciąganie R_m . Obliczenia wykonać dla ołowiu ($\rho = 11,3 \text{ g/cm}^3$, $R_m = 15 \text{ MPa}$) i dla stali ($\rho = 7,85 \text{ g/cm}^3$).

ODPOWIEDŹ:

$$l = \frac{R_m}{\rho g}, \quad l_1 = 135 \text{ m}, \quad l_2 = 4990 \text{ m}$$

Zadanie 1.6. Sporządzić wykres sił i naprężeń normalnych dla pręta pokazanego na rys. 1.2a oraz obliczyć całkowite wydłużenie tego pręta.



Rys. 1.2. Do zadania 1.6

Rozwiązanie. W każdym przekroju między punktami A i B wystąpi taka sama siła normalna. Przetnijmy pręt przekrojem $I-I$ i rozpatrzmy równowagę dolnej części. Siłę normalną zaznaczamy zawsze jako siłę rozciągającą badaną część pręta

$$\sum P_{ix} = -N_1 + 2P = 0$$

stąd

$$N_1 = +2P \text{ (siła rozciągająca)}$$

Analogicznie dla przekroju II-II

$$\sum P_{ix} = -N_2 + P + 2P = 0$$

więc

$$N_2 = +3P \text{ (siła rozciągająca)}$$

Naprężenia w dolnej i górnej części wynoszą

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = +2\frac{P}{F}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{F} = +3\frac{P}{F}$$

Całkowite wydłużenie pręta jest równe sumie algebraicznej wydłużeń dolnej i górnej części pręta

$$\Delta l_c = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{N_1 l_1}{EF} + \frac{N_2 l_2}{EF} = \frac{2P \cdot 3a}{EF} + \frac{3P \cdot 2a}{EF} = +\frac{12Pa}{EF}$$

Znak „+” świadczy o tym, że pręt wydłużył się.

Wykres sił i naprężeń normalnych jest pokazany na rys. 1.2b.

Zadanie 1.7. Wyznaczyć całkowite wydłużenie pręta przedstawionego na rys. 1.2a stosując metodę superpozycji.

Rozwiązanie. Wydłużenie pręta tylko od siły $2P$ (siła przyłożona do dolnego końca) wynosi

$$\Delta l_1 = \frac{2P \cdot 5a}{EF}$$

zaś tylko od siły P (przyłożona w punkcie B) wydłużenie (tylko górnej części o długości $2a$) jest równe

$$\Delta l_2 = \frac{P \cdot 2a}{EF}$$

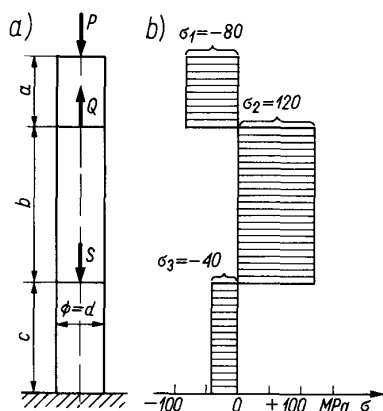
Całkowite wydłużenie pręta pod działaniem sił P i $2P$ wynosi

$$\Delta l_c = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{10Pa}{EF} + \frac{2Pa}{EF} = \frac{12Pa}{EF}$$

Zadanie 1.8. Pręt stalowy o średnicy $d = 4$ cm jest obciążony siłami $P = 100$ kN, $Q = 250$ kN oraz $S = 200$ kN (rys. 1.3a). Obliczyć naprężenia w poszczególnych przekrojach oraz wydłużenie całkowite pręta. Wartości naprężeń występujących w poszczególnych przekrojach przedstawić w formie wykresu. Dane: $a = 1$ m, $b = 2$ m, $c = 1,5$ m, $E = 2,0 \cdot 10^5$ MPa.

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_1 \approx -80 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 \approx 120 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 \approx -40 \text{ MPa}, \quad \Delta l_c = 0,5 \text{ mm}$$

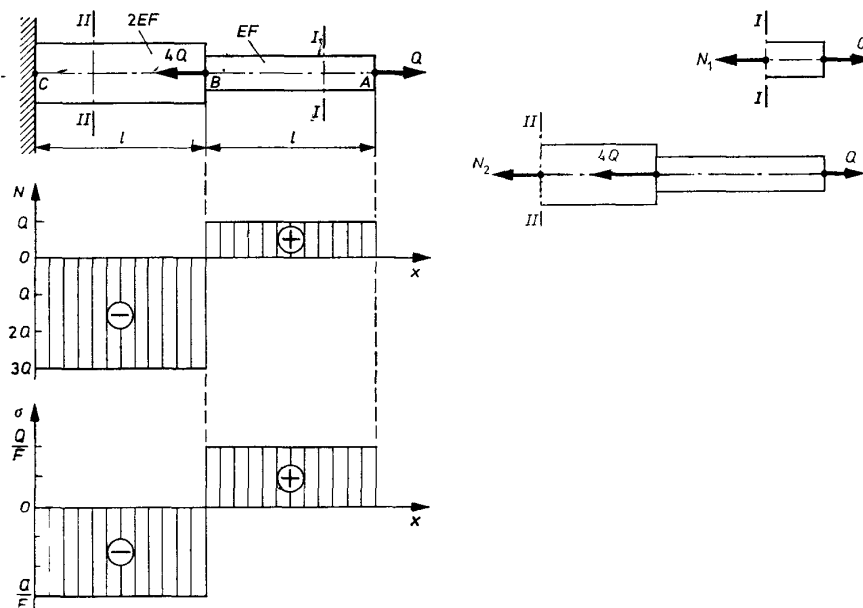


Rys. 1.3. Do zadania 1.8

Zadanie 1.9. Wykonać wykresy sił i naprężeń normalnych dla pręta przedstawionego na rys. 1.4. Obliczyć całkowite wydłużenie tego pręta oraz przemieszczenie punktu B.

Rozwiązanie. Siła normalna w przedziale I (AB) wynosi $N_1 = +Q$, a w przedziale II (BC) $N_2 = -3Q$. Naprężenia wynoszą odpowiednio

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{+Q}{F}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{-3Q}{2F}$$



Rys. 1.4. Do zadania 1.9

Wydłużenie całkowite jest równe

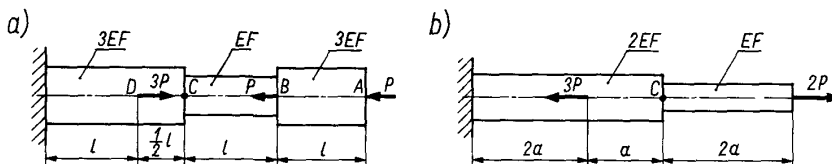
$$\Delta l_c = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{N_1 l}{EF_1} + \frac{N_2 l}{EF_2} = \frac{+Ql}{EF} + \frac{-3Ql}{2EF} = -\frac{Ql}{2EF}$$

Odształcenie jest ujemne, a więc pręt ulegnie skróceniu. Przeszyczenie punktu B (równe skróceniu części BC , łączącej punkt B z nieruchomą ścianą) wynosi

$$f_B = \Delta l_2 = -\frac{3Ql}{2EF}$$

Odształcenie jest ujemne, a więc punkt B przemieści się w lewo.

Zadanie 1.10. Dla prętów pokazanych na rys. 1.5 a i b wykonać wykresy sił i naprężeń normalnych oraz obliczyć całkowite wydłużenie prętów i przeszczenie punktów C . Zadanie rozwiązać metodą przecięć i metodą superpozycji.

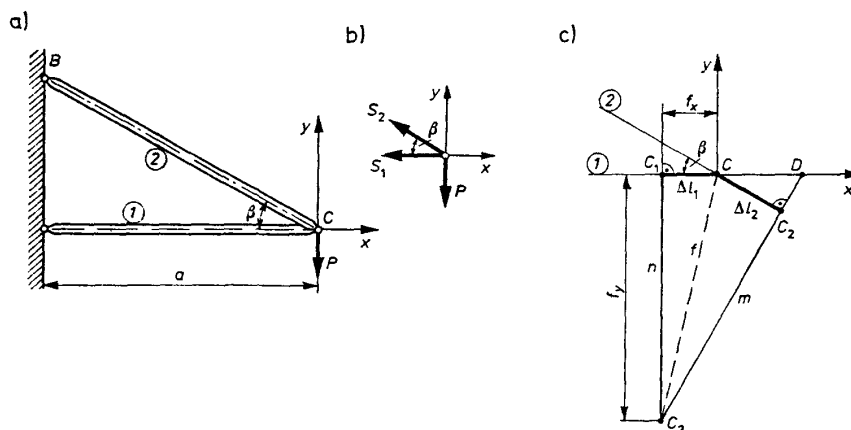


Rys. 1.5. Do zadania 1.10

ODPOWIEDŹ:

$$a) \quad \Delta l = -\frac{7Pl}{3EF}, \quad f_C = 0; \quad b) \quad \Delta l = \frac{4Pa}{EF}, \quad f_C = 0$$

Zadanie 1.11. Układ prętowy przedstawiony na rys. 1.6 jest obciążony siłą P . Obliczyć składowe przeszczenia punktu C . Sztywność rozciągania obydwu prętów wynosi EF .



Rys. 1.6. Do zadania 1.11

Rozwiązanie. Z warunków równowagi węzła C (rys. 1.6b) znajdujemy

$$S_1 = -P_1 \operatorname{ctg} \beta \quad \text{oraz} \quad S_2 = P / \sin \beta$$

Odształcenia prętów wynoszą

$$\Delta l_1 = \frac{-P \operatorname{ctg} \beta a}{EF}, \quad \Delta l_2 = \frac{Pa}{EF \sin \beta \cos \beta} = \frac{2Pa}{EF \sin 2\beta}$$

Pręt 1 ulegnie skróceniu o Δl_1 (rys. 1.6c) oraz obróci się dookoła punktu A (dla niewielkich odształceń łuk okręgu można zastąpić styczną), koniec C pręta 1 przesunie się więc, po skróceniu, wzdłuż prostej n . Analogicznie pręt 2 wydłuży się o Δl_2 , a jego koniec przesunie się wzdłuż prostopadłej do osi tego pręta (tj. wzdłuż prostej m). Punkt C przemieści się do położenia C_3 (punkt przecięcia prostych n i m). Składowa pozioma przemieszczenia punktu C wynosi więc $f_x = |\Delta l_1|$, zaś składowa pionowa f_y (z trójkąta $C_1 C_3 D$) jest równa

$$f_y = C_1 D \operatorname{ctg} \beta$$

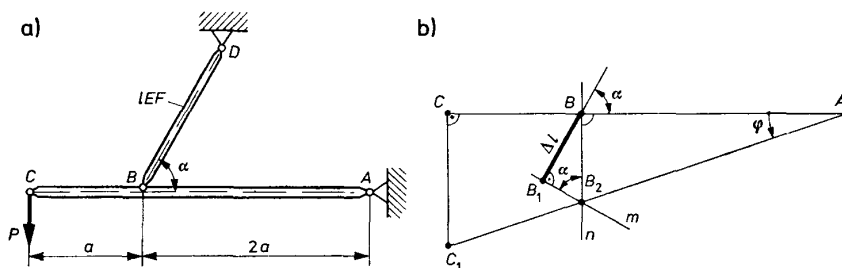
Ponieważ

$$C_1 D = C_1 C + CD = \Delta l_1 + \frac{\Delta l_2}{\cos \beta}$$

więc

$$f_y = \Delta l_1 \operatorname{ctg} \beta + \frac{\Delta l_2}{\sin \beta}$$

Zadanie 1.12. Lekka sztywna belka (rys. 1.7) jest zamocowana przegubowo w punkcie A i zawieszona na pręcie BD (długość l , sztywność EF , kąt nachylenia α). Obliczyć kąt, o jaki obróci się belka, jeżeli zostanie obciążona siłą P .

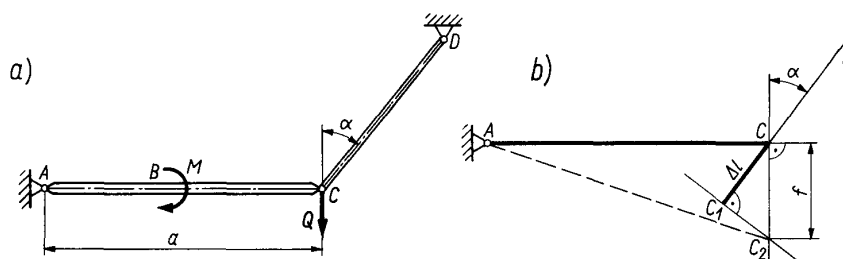


Rys. 1.7. Do zadania 1.12

Rozwiązanie. Siła w pręcie $S = 3P/2 \sin \alpha$, a więc pręt wydłuży się o $\Delta l = 3Pl/2EF \sin \alpha$. Koniec B pręta przesunie się wzdłuż osi pręta o odcinek $BB_1 = \Delta l$ (rys. 1.7b) oraz przemieści się po prostopadłej m aż do przecięcia z prostą n , po której przesunie się (obróci dookoła punktu A) punkt B belki. Kąt obrotu φ belki (z trójkąta ABB_2) wynosi

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{BB_2}{AB} = \frac{\Delta l}{2a \sin \alpha} = \frac{3Pl}{4aEF \sin^2 \alpha}$$

Zadanie 1.13. Sztywna, lekka belka o długości $a = 2$ m zamocowana przegubowo w punkcie A i zawieszona na pręcie jest obciążona momentem $M = 11\,000$ N·m i siłą $Q = 5000$ N. Pręt o długości $l = 1$ m ustawiony pod kątem $\alpha = 45^\circ$ jest wykonany ze stali St3 ($k_r = 1200$ MPa, $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa). Obliczyć wymaganą średnicę pręta oraz obniżenie f punktu C .



Rys. 1.8. Do zadania 1.13

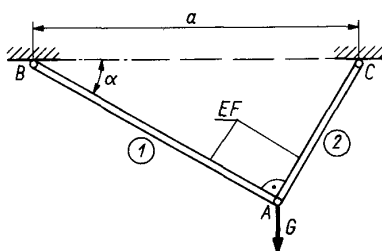
ODPOWIEDŹ:

$$d \geq 12,6 \text{ mm}, \quad f = 0,6 \text{ mm}$$

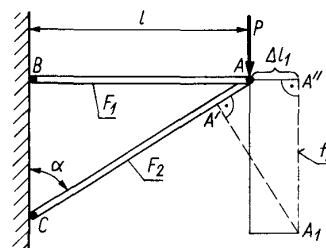
Zadanie 1.14. Dwa pręty stalowe są połączone przegubowo w punkcie A i obciążone siłą G (rys. 1.9). Obliczyć składową pionową przemieszczenia punktu A .

ODPOWIEDŹ:

$$f = \sqrt{2}Ga \frac{\sin(2\alpha)}{2EF}$$



Rys. 1.9. Do zadania 1.14



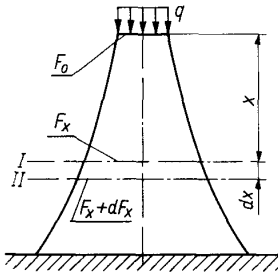
Rys. 1.10. Do zadania 1.15

Zadanie 1.15. Wspornik składa się z dwóch przegubowo połączonych prętów AB i AC (rys. 1.10). Wyznaczyć naprężenia i wydłużenia prętów oraz przemieszczenia przegubu A , gdy wspornik jest obciążony siłą P . Dane liczbowe: $P = 30$ kN, długość pręta AB : $l = 1,2$ m, pole przekroju $F_1 = 4$ cm², pole przekroju pręta AC : $F_2 = 6$ cm², $\alpha = 60^\circ$, $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa.

ODPOWIEDŹ:

$$\Delta l_1 = 0,745 \text{ mm}, f_A = A'' A_1 = 2,71 \text{ mm}, \sigma_1 = 130 \text{ MPa}, \sigma_2 = -100 \text{ MPa}$$

Zadanie 1.16. Dobrać tak przekrój poprzeczny filaru (rys. 1.11), wykonanego z betonu o ciężarze właściwym γ , aby naprężenia w każdym przekroju były jednakowe i równe wytrzymałości na ściskanie k_c (słup o stałej wytrzymałości na ściskanie). Górna powierzchnia filaru o polu F_0 jest obciążona równomiernym naciskiem $q = k_c$.



Rys. 1.11. Do zadania 1.16

Rozwiązanie. Filar przecinamy dwiema płaszczyznami poziomymi odległymi o dx od siebie. Część filaru między płaszczyznami I i II można traktować jako graniastosłup. Przy przejściu od przekroju I do II siła normalna ulega powiększeniu o wielkość równą ciężarowi graniastosłupa $dN = dQ = F_x dx \gamma$, a przekrój poprzeczny zwiększy się o dF_x . Stosunek przyrostu siły normalnej do przyrostu pola przekroju poprzecznego musi być równy naprężeniom $q = k_c$

$$\frac{F_x dx \gamma}{dF_x} = q$$

a po rozdzieleniu zmiennych

$$\frac{dF_x}{F_x} = \frac{\gamma}{q} dx$$

Całkując stronami, otrzymujemy

$$\ln F_x = \frac{\gamma}{q} x + C$$

Stałą całkowania C wyznaczamy z warunku brzegowego, a mianowicie: dla $x = 0$ pole przekroju $F_x = F_0$, więc $C = \ln F_0$. Zatem

$$\frac{\gamma}{q} x = \ln \frac{F_x}{F_0}$$

Ostatecznie otrzymamy

$$F_x = F_0 e^{\gamma x / q}$$

Akademia Górniczo-Hutnicza
Imienia Stanisława Staszica
Wydział Inżynierii
Mechanicznej i Robotyki
BIBLIOTEKA

Statycznie niewyznaczalne przypadki rozciągania – ściskania prętów

2

Wprowadzenie

W układach statycznie niewyznaczalnych, tzn. takich, w których statyka ciała sztywnego daje mniej równań równowagi niż liczba niewiadomych, dodatkowe równania uzyskujemy z zależności wynikających z odkształceń.

Odkształcenia układu możemy przyjmować dowolne, byleby zgodnie z więzami, zaś siły muszą odpowiadać przyjętym odkształceniom (jeżeli np. pręt ulega wydłużeniu, to wywołuje to siła rozciągająca).

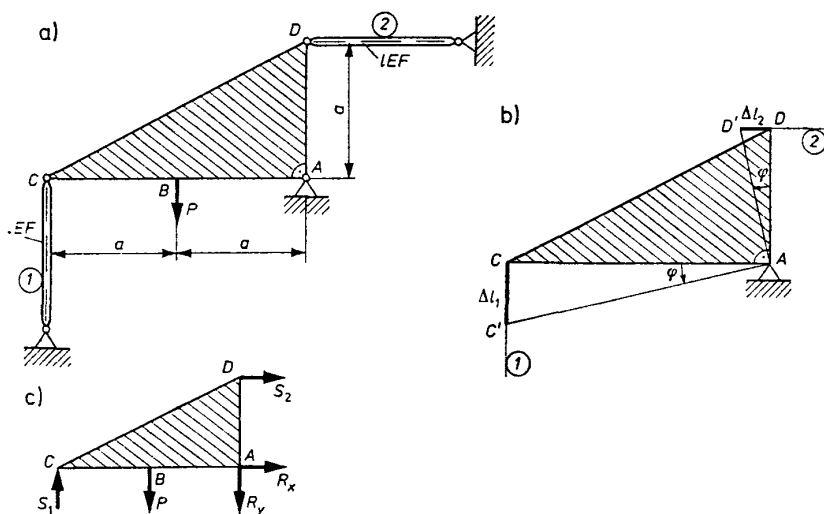
W treści i układzie zadań preferowane jest stosowanie metody naprężeń dopuszczalnych. Wprowadzane obecnie coraz szerzej metody stanów granicznych, podane są głównie dla informacji, że takie metody istnieją i na czym polega ich istota. Stosowanie tych metod obowiązuje w fazie obliczeń sprawdzających i należy je przeprowadzać zgodnie z aktualnymi, systematycznie nowelizowanymi normami państwowymi lub branżowymi (np. PN-90/B-03200 „Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie”).

Zadanie 2.1. Obliczyć dopuszczalną wartość siły P , jaką można obciążyć nieodkształcalną płytę trójkątną (rys. 2.1a). Naprężenia dopuszczalne na rozciąganie i na ściskanie dla prętów wynoszą $k_r = k_c = 100 \text{ MN/m}^2$, a ich pola przekroju $F = 3 \text{ cm}^2$.

Rozwiązanie. Pod wpływem siły P płyta obróci się dokoła punktu A o pewien kąt φ (rys. 2.1b). Pręt 1 ulegnie skróceniu o Δl_1 , a pręt 2 wydłuży się o Δl_2 , zatem zwroty sił S_1 i S_2 będą takie jak na rys. 2.1c. Z równań równowagi płyty wykorzystamy tylko równanie momentów względem punktu A (pozostałe równania równowagi pozwalają obliczyć składowe reakcji w przegubie A)

$$\sum M_A = Pa - S_1 \cdot 2a - S_2 a = 0$$

Ponieważ liczba niewiadomych sił i reakcji jest większa niż liczba równań



Rys. 2.1. Do zadania 2.1

równowagi (układ jednokrotnie statycznie niewyznaczalny), potrzebne jest dodatkowe równanie.

Z zależności geometrycznych wiążących wydłużenia prętów (rys. 2.1b) otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta l_1}{2a} = \frac{\Delta l_2}{a}$$

stąd po zastosowaniu prawa Hooke'a $S_1 = 2S_2$. Z otrzymanych równań znajdujemy $S_1 = \frac{2}{5}P$ oraz $S_2 = \frac{1}{5}P$.

Większe naprężenia występują w pręcie 1: $\sigma_1 = S_1/F = 2P/5F \leq k_c$. Siła P musi więc spełniać warunek

$$P \leq 2,5Fk_c = 2,5 \cdot 300 \text{ mm}^2 \cdot 100 \text{ N/mm}^2 = 75\,000 \text{ N}$$

Zadanie 2.2. Sztywna belka jest zawieszona na trzech jednakowych prętach i obciążona siłą Q jak na rys. 2.2. Obliczyć siły w prętach.

Rozwiązanie. Łatwo przewidzieć, że pręt 3 się wydłuży, natomiast trudno przewidzieć, czy pręt 1 się wydłuży, czy skróci. Zakładamy, że wszystkie pręty ulegną wydłużeniu (rys. 2.2b), wówczas siły działają na belkę tak jak na rys. 2.2c. Ze statyki możemy napisać dwa równania

$$S_1 + S_2 + S_3 = Q$$

$$S_1 \cdot 2a + S_2 a = 0$$

Rozwiązanie. Płyta obróci się o pewien kąt φ dookoła stałego przegubu. Punkt C płyty będzie się poruszał po normalnej do promienia AC , zajmie więc położenie C_1 (rys. 2.3b). Pręt 2 musi się wydłużyć o Δl_2 i obrócić tak, aby dolny koniec C pręta 2 znalazł się w punkcie C_1 (na rys. 2.3b punkt C przemieszcza się wzdłuż osi pręta o odcinek Δl_2 , a następnie w kierunku prostopadłym do osi pręta – do punktu C_1).

Obydwa pręty wydłużą się, a więc działają w nich siły rozciągające (rys. 2.3c). Z równań równowagi wykorzystamy tylko równanie momentów

$$\sum M_A = M_0 - S_1 \cdot 3a - S_2 \cdot 4a = 0$$

Brakujące równanie otrzymamy z porównania odkształceń (rys. 2.3b).

Ponieważ $AB = 3a$ i $AC = 5a$, po oznaczeniu odcinka $CC_1 = x$, możemy napisać

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta l_1}{3a} = \frac{x}{5a}$$

stąd

$$x = \frac{5}{3} \Delta l_1$$

Kąt C_1CD (rys. 2.3b) wynosi α , a więc $\cos \alpha = \Delta l_2/x$, zaś z trójkąta ADC znajdziemy $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, zatem $x = \frac{5}{4} \Delta l_2$. Z porównania otrzymanych wyników mamy $\Delta l_1 = \frac{3}{4} \Delta l_2$, po zastosowaniu zaś prawa Hooke'a otrzymujemy brakujące równanie

$$S_1 = \frac{3}{4} S_2$$

Z powyższych równań znajdujemy

$$S_1 = \frac{3}{25} \frac{M_0}{a} = \frac{3}{25} \frac{50000 \text{ N} \cdot \text{m}}{1 \text{ m}} = 6000 \text{ N} = 6 \text{ kN}$$

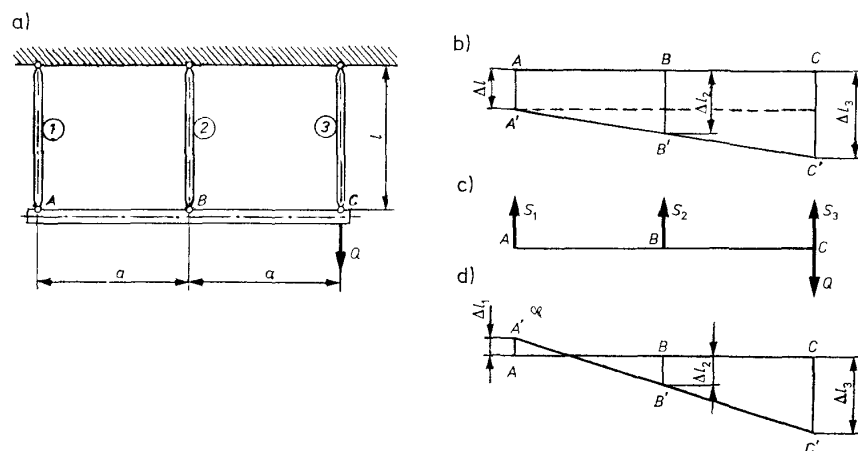
$$S_2 = \frac{4}{25} \frac{M_0}{a} = \frac{4}{25} \frac{50000 \text{ N} \cdot \text{m}}{1 \text{ m}} = 8000 \text{ N} = 8 \text{ kN}$$

Zadanie 2.4. Obliczyć reakcje sztywnych i nieprzesuwnych ścian oraz przemieszczenie punktu K pręta przedstawionego na rys. 2.4. Zadanie rozwiązać stosowaną dotychczas metodą przecięć, a następnie metodą superpozycji.

Rozwiązanie.

1. *Metoda przecięć.* Całkowite odkształcenie pręta, równe sumie odkształceń poszczególnych jego odcinków, jest równe zeru

$$\Delta l_c = \frac{R_1 a}{2EF} + \frac{(R_1 - P) \cdot a}{2EF} + \frac{(R_1 - P) \cdot 3a}{2EF} + \frac{(R_1 - 3P) \cdot 3a}{2EF} = 0$$



Rys. 2.2. Do zadania 2.2

Brakujące równanie (zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne) otrzymamy z porównania odkształceń

$$\frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{2a} = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{a}$$

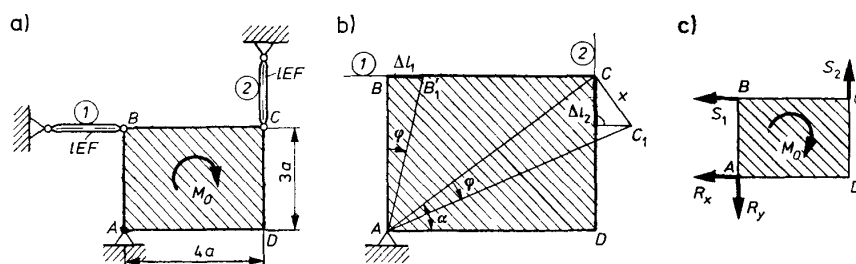
Stąd po zastosowaniu prawa Hooke'a mamy

$$S_3 - S_1 = 2(S_2 - S_1)$$

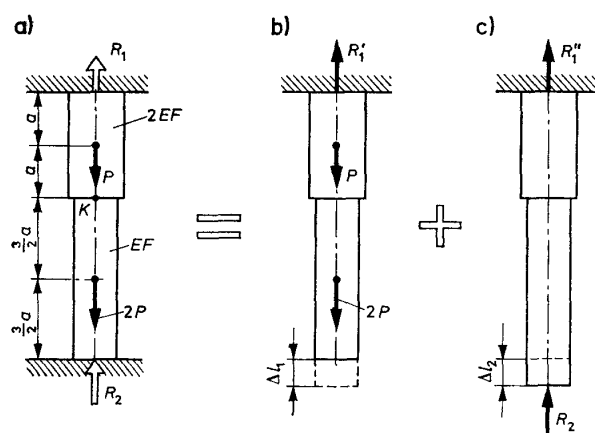
Z powyższych równań otrzymujemy: $S_1 = -\frac{1}{6}Q$, $S_2 = \frac{1}{3}Q$ i $S_3 = \frac{5}{6}Q$.

W pręcie 1 występuje więc siła o zwrocie przeciwnym do założonego, tj. siła ściskająca, zatem pręt ten ulegnie skróceniu. Rzeczywiste odkształcenia prętów przedstawiono na rys. 2.2d.

Zadanie 2.3. Płyta prostokątna (rys. 2.3) zamocowana przegubowo w punkcie A i zawieszona na dwóch prętach jest obciążona momentem $M_0 = 50 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Obliczyć siły w prętach. Wymiar płyty $a = 1 \text{ m}$.



Rys. 2.3. Do zadania 2.3



Rys. 2.4. Do zadania 2.4

Stąd $R_1 = \frac{13}{8}P$, zaś z równania statyki $R_2 = \frac{11}{8}P$.

2. *Metoda superpozycji.* Gdyby nie działała reakcja R_2 , wówczas swobodne wydłużenie pręta wywołane siłami zewnętrznymi P i $2P$ wynosiłoby (rys. 2.4b)

$$\Delta l_1 = \frac{Pa}{2EF} + \frac{2P \cdot 3a}{2EF} + \frac{2P \cdot 2a}{2EF}$$

Gdyby nie działały siły P i $2P$, lecz jedynie reakcja R_2 , wówczas wydłużenie (skrócenie) pręta wynosiłoby (rys. 2.4c)

$$\Delta l_2 = -\frac{R_2 \cdot 3a}{EF} - \frac{R_2 \cdot 2a}{2EF}$$

Wydłużenie całkowite pręta (rys. 2.4a) jest równe zero, zatem z warunku $\Delta l_1 + \Delta l_2 = 0$ znajdujemy reakcję $R_2 = \frac{11}{8}P$, ze statyki zaś $R_1 = 3P - R_2 = \frac{13}{8}P$.

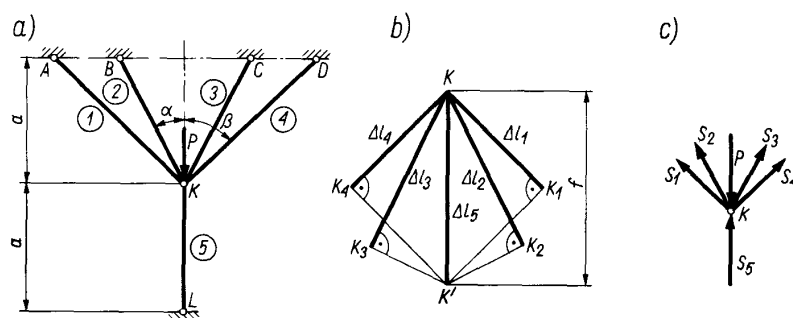
Przemieszczenie punktu K wynosi

$$f_K = \frac{R_1 \cdot 2a}{2EF} - \frac{Pa}{2EF} = \frac{13Pa}{8EF} - \frac{Pa}{2EF} = \frac{9Pa}{8EF}$$

Zadanie 2.5. Wyznaczyć przemieszczenie przegubu K układu prętowego (rys. 2.5) obciążonego siłą P . Dane: $P = 100 \text{ kN}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $a = 1 \text{ m}$, przekroje wszystkich prętów są jednakowe i wynoszą $F = 4 \text{ cm}^2$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Rozwiązanie. Ponieważ układ jest symetryczny, zatem punkt A przemieści się pionowo w dół. Wydłużenia prętów są takie jak na rys. 2.5b, zaś siły w prętach (rys. 2.5c) są sobie odpowiednio parami równe: $S_1 = S_4$ oraz $S_2 = S_3$. Z uwagi na symetrię układu ze statyki otrzymamy równanie

$$P - 2S_1 \cos \beta - 2S_2 \cos \alpha - S_5 = 0$$



Rys. 2.5. Do zadania 2.5

Mamy więc trzy niewiadome, a jedno równanie statyki, zadanie jest więc dwukrotnie statycznie niewyznaczalne. Musimy zatem ułożyć dwa dodatkowe równania odkształceń. Z rysunku 2.5b wynika, że $\Delta l_1 = \Delta l_5 \cos \beta$ oraz $\Delta l_3 = \Delta l_5 \cos \alpha$. Wykorzystując prawo Hooke'a, z powyższych zależności otrzymamy

$$S_1 = S_4 = \frac{P \cos^2 \beta}{1 + 2 \cos^3 \alpha + 2 \cos^3 \beta}$$

$$S_2 = S_3 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha + 2 \cos^3 \beta}$$

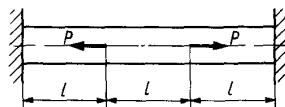
$$S_5 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha + 2 \cos^3 \beta}$$

Przemieszczenie punktu K wynosi

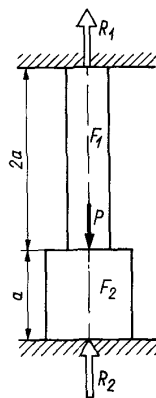
$$\begin{aligned} \Delta l_5 &= \frac{Pl}{EF(1 + 2 \cos^3 \alpha + 2 \cos^3 \beta)} = \\ &= \frac{100\,000 \text{ N} \cdot 1000 \text{ mm}}{2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \cdot 400 \text{ mm}^2 \left[1 + 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 + 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \right]} = 0,4 \text{ mm} \end{aligned}$$

Zadanie 2.6. Pręt stalowy został zamurowany między dwiema sztywnymi i nieprzesuwnymi ścianami, a następnie obciążony dwiema osiowymi siłami P (rys. 2.6). Wyznaczyć naprężenia w pręcie.

ODPOWIEDŹ. W części środkowej pręt jest rozciągany naprężeniami $\frac{2P}{3F}$, zaś w częściach końcowych ściskany naprężeniami $\frac{P}{3F}$.



Rys. 2.6. Do zadania 2.6



Rys. 2.7. Do zadania 2.7

Zadanie 2.7. Pręt o przekroju skokowo zmiennym $F_1 = 3 \text{ cm}^2$ i $F_2 = 6 \text{ cm}^2$ jest utwierdzony w obu końcach i obciążony siłą $P = 100 \text{ kN}$ ($\approx 10000 \text{ kG}$) w sposób podany na rys. 2.7. Wykonać wykres naprężeń.

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_1 = 66,7 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = -133 \text{ MPa}$$

Zadanie 2.8. Słup betonowy (rys. 2.8), o wysokości l , zbrojony prętami stalowymi jest ściskany osiowo równomiernie rozłożoną siłą P (siła P działa poprzez sztywną lekką płytę). Pole przekroju wszystkich prętów stalowych F_s stanowi 5% pola przekroju betonu F_b ($F_s = 0,05F_b$). Stosunek modułów Younga dla stali E_s i dla betonu E_b wynosi $\frac{E_s}{E_b} = 12$. Obliczyć siły ściskające beton i stal.

Rozwiązanie. Siła P ściskająca słup jest równa sumie algebraicznej siły P_s ściskającej pręty stalowe i siły P_b ściskającej beton $P = P_s + P_b$. Skrócenie prętów stalowych musi być równe skróceniu słupa betonowego, zatem

$$\Delta l_s = \frac{P_s l}{E_s F_s} = \Delta l_b = \frac{P_b l}{E_b F_b}$$

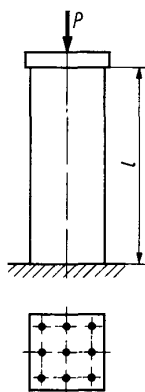
stąd

$$\frac{P_s}{P_b} = \frac{E_s F_s}{E_b F_b} = 12 \cdot 0,05 = 0,60$$

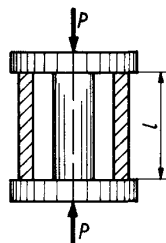
Ostatecznie

$$P_s = \frac{3P}{8}, \quad P_b = \frac{5P}{8}$$

Zadanie 2.9. Wewnątrz tulei stalowej o polu przekroju poprzecznego $F_1 = 400 \text{ mm}^2$ znajduje się walec miedziany o takiej samej długości i polu przekroju



Rys. 2.8. Do zadania 2.8



Rys. 2.9. Do zadania 2.9

poprzecznego $F_2 = 250 \text{ mm}^2$. Elementy te są ściskane między sztywnymi płytami osiową siłą P . Obliczyć maksymalną wartość siły P , jeżeli naprężenia dopuszczalne na ściskanie dla stali wynoszą $k_{c1} = 50 \text{ MPa}$, a dla miedzi $k_{c2} = 30 \text{ MPa}$. Stosunek modułów Younga $\frac{E_1}{E_2} = 2$.

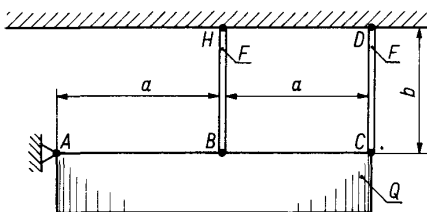
ODPOWIEDŹ:

$$P_{\max} = 31\,500 \text{ N}$$

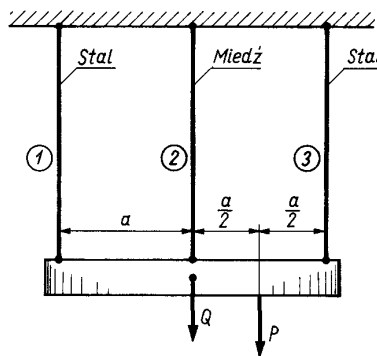
Zadanie 2.10. Sztywna płyta o ciężarze $Q = 50 \text{ kN}$ została połączona z podłożem za pomocą przegubu stałego A i podwieszona na dwóch jednakowych prętach, każdy o długości l i przekroju $F = 2 \text{ cm}^2$, w sposób pokazany na rys. 2.10. Wyznaczyć naprężenia w tych prętach.

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_{CD} = 100 \text{ MPa}, \quad \sigma_{BH} = 50 \text{ MPa}$$



Rys. 2.10. Do zadania 2.10



Rys. 2.11. Do zadania 2.11

Zadanie 2.11. Nieodkształcalną belkę o ciężarze $Q = 10$ kN zawieszono na trzech przegubowo połączonych prętach o jednakowej długości i przekroju $F = 2 \text{ cm}^2$ (rys. 2.11). Pręt środkowy jest miedziany, zaś boczne są stalowe. Obliczyć naprężenia w prętach, jeżeli na belkę działa siła $P = 30$ kN. Moduł Younga dla miedzi wynosi $E_m = 1 \cdot 10^5$ MPa, zaś dla stali $E_{st} = 2 \cdot 10^5$ MPa.

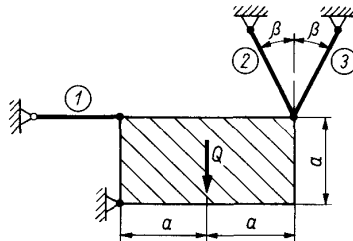
ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_1 = 42,5 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 40 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = 117,5 \text{ MPa}$$

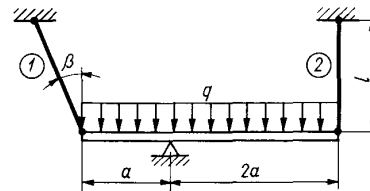
Zadanie 2.12. Wyznaczyć siły w prętach układu przedstawionego na rys. 2.12. Wszystkie pręty są o jednakowej długości l i sztywności rozciągania EF . Dane: Q, β .

ODPOWIEDŹ:

$$S_1 = \frac{Q}{1 + 4 \cos^2 \beta}, \quad S_2 = S_3 = \frac{2Q \cos \beta}{1 + 4 \cos^2 \beta}$$



Rys. 2.12. Do zadania 2.12



Rys. 2.13. Do zadania 2.13

Zadanie 2.13. Obliczyć naprężenia w prętach układu pokazanego na rys. 2.13. Dane: q, a, F, β .

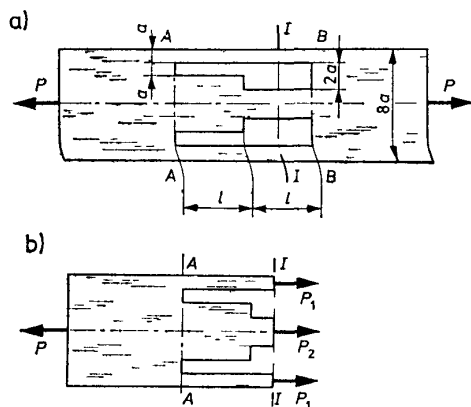
ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_1 = \frac{3qa \cos^2 \beta}{2F(4 + \cos^3 \beta)}, \quad \sigma_2 = \frac{3qa}{F(4 + \cos^3 \beta)}$$

Zadanie 2.14. Płaskownik o grubości g z wycięciami (rys. 2.14) jest rozciągany siłą P . Obliczyć największe naprężenia w płaskowniku.

Rozwiązanie. W obszarze między przekrojami $A-A$ oraz $B-B$, to jest w przekrojach osłabionych wycięciami, płaskownik jest rozciągany siłami: część środkowa siłą P_2 , zaś części boczne jednakowymi – ze względu na symetrię – siłami P_1 . Z warunku równowagi wynika, że $P = 2P_1 + P_2$. Zagadnienie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. Wydłużenia części środkowej i bocznej odcinka AB muszą być jednakowe, zatem

$$\Delta l_1 = \frac{P_1 \cdot 2l}{E(ag)} = \Delta l_2 = \frac{P_2 l}{E(4ag)} + \frac{P_2 l}{E(2ag)}$$



Rys. 2.14. Do zadania 2.14

stąd

$$8P_1 = 3P_2$$

Z powyższych równań znajdujemy $P_1 = \frac{3}{14}P$ i $P_2 = \frac{4}{7}P$. Największe naprężenia występują albo w części bocznej

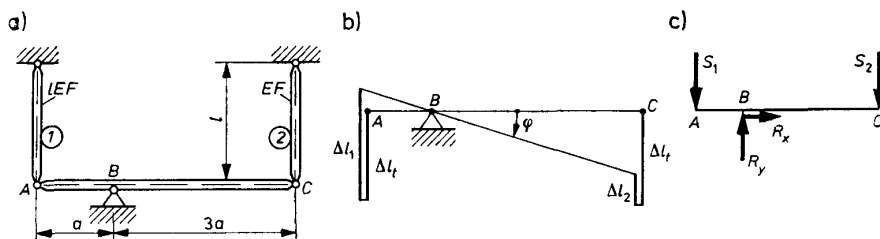
$$\sigma_1 = \frac{P_1}{ag} = \frac{3}{14} \frac{P}{ag}$$

albo w najwęższym miejscu części środkowej

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{2ag} = \frac{4}{7} \frac{P}{2ag} = \frac{2}{7} \frac{P}{ag}$$

Ponieważ $\sigma_2 > \sigma_1$, więc $\sigma_{max} = \sigma_2 = \frac{2}{7} \frac{P}{ag}$.

Zadanie 2.15. Obliczyć naprężenia, jakie powstaną w stalowych prętach po podgrzaniu ich o $\Delta t = 50^\circ\text{C}$ (rys. 2.15). Współczynnik rozszerzalności liniowej $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5}/1^\circ\text{C}$.



Rys. 2.15. Do zadania 2.15

Rozwiązanie. Wskutek ogrzania obydwie pręty wydłużyłyby się o równe odcinki $\Delta l_t = l\alpha\Delta t$. Przypuśćmy, że pręt 2 na skutek sprężystości konstrukcji ulegnie równocześnie skróceniu mechanicznemu o Δl_2 . Wówczas belka obróci się o kąt φ i pręt 1 musi ulec skróceniu o Δl_1 . Warunek odkształceń ma postać

$$\frac{\Delta l_1 - \Delta l_t}{a} = \frac{\Delta l_t - \Delta l_2}{3a}$$

Obydwie pręty są ściskane (rys. 2.15c) i warunek równowagi ma postać

$$S_1 a = S_2 \cdot 3a$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy

$$S_1 = \frac{6}{5}EF\alpha\Delta t, \quad S_2 = \frac{2}{5}EF\alpha\Delta t$$

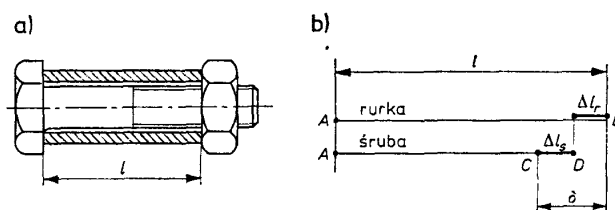
a zatem

$$\sigma_1 = \frac{6}{5}E\alpha\Delta t = \frac{6}{5} \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 1,1 \cdot 10^{-5} \cdot 50 = 138,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{5}E\alpha\Delta t = \frac{2}{5} \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 1,1 \cdot 10^{-5} \cdot 50 = 46,2 \text{ MPa}$$

Naprężenia w pręcie 1 osiągnęły wartość porównywalną z naprężeniami dopuszczalnymi bez obciążenia układu siłami zewnętrznymi.

Zadanie 2.16. Na śrubę o skoku gwintu h założono rurkę o długości l i skręcono nakrętką do skasowania luzu osiowego, a następnie dokręcono nakrętkę o $\frac{1}{4}$ obrotu (rys. 2.16). Obliczyć naprężenia w śrubie i rurce, jeżeli stosunek pól przekrojów poprzecznych tych elementów wynosi $F_r/F_s = 3$, a modułów Younga $E_s/E_r = 2$.



Rys. 2.16. Do zadania 2.16

Rozwiązanie. Wskutek obrotu nakrętki długość czynna śruby zmniejszyła się o $\delta = \frac{1}{4}h$ (punkt C na rysunku odkształceń). Ponieważ długość czynna śruby i rurki musi być jednakowa, położenie równowagi ustali się pomiędzy punktami C

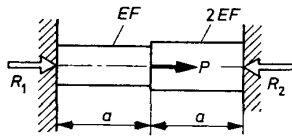
i B, np. w punkcie D. Śruba musi ulec wydłużeniu o Δl_s , a rurka skróceniu o Δl_r . Z rysunku odkształceń wynika, że $\Delta l_s + \Delta l_r = \delta$. Siła w śrubie P_s musi być równa sile w rurce P_r

$$P_s = \sigma_s F_s = P_r = \sigma_r F_r$$

Po obliczeniach naprężenia wynoszą

$$\sigma_s = \frac{h E_s}{4l \left(\frac{F_s E_s}{F_r E_r} + 1 \right)}, \quad \sigma_r = \frac{h E_s}{4l \left(\frac{E_s}{E_r} + \frac{F_r}{F_s} \right)}$$

Zadanie 2.17. Obliczyć reakcje ścian, jakie powstaną po obciążeniu siłą P (rys. 2.17) obustronnie zamurowanego pręta i podgrzaniu układu o $\Delta t^\circ\text{C}$.



Rys. 2.17. Do zadania 2.17

Rozwiązanie. Całkowite odkształcenie pręta jest równe sumie algebraicznej odkształcenia termicznego Δl_t i mechanicznego Δl_m , zatem

$$\Delta l_c = \Delta l_t + \Delta l_m = 0$$

Odkształcenia wynoszą

$$\Delta l_t = 2a\alpha\Delta t$$

$$\Delta l_m = \frac{-R_1 a}{EF} + \frac{(-R_1 - P)a}{2EF}$$

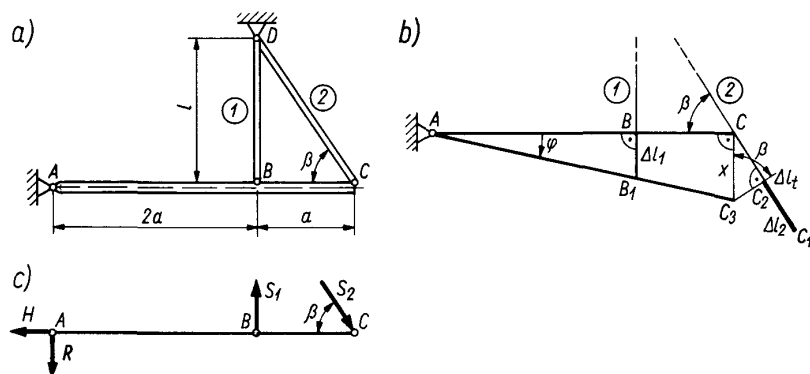
Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy

$$R_1 = \frac{4}{3}EF\alpha\Delta t - \frac{1}{3}P$$

zaś po podstawieniu tej wartości do równania statyki $R_2 = P + R_1$ mamy

$$R_2 = \frac{4}{3}EF\alpha\Delta t + \frac{2}{3}P$$

Zadanie 2.18. Obliczyć siły, jakie wystąpią w prętach DB oraz DC układu podanego na rys. 2.18a, jeżeli pręt DC zostanie podgrzany o Δt , a współczynnik cieplnej rozszerzalności liniowej materiału pręta DC wynosi α .



Rys. 2.18. Do zadania 2.18

Rozwiązanie. Swobodne wydłużenie termiczne pręta DC wyniesie

$$\Delta l_t = \Delta t \alpha \frac{l}{\sin \beta}$$

a koniec C pręta przemieści się do położenia C_1 (rys. 2.18b).

W pręcie DB pojawi się siła rozciągająca S_1 powodująca wydłużenie $\Delta l_1 = \frac{S_1 l}{EF}$, natomiast w pręcie DC powstanie siła ściskająca S_2 powodująca skrócenie Δl_2 , stąd całkowite wydłużenie pręta DC wynosi $\Delta l_t - \Delta l_2$, czemu odpowiada punkt C_2 na rys. 2.18b, przy czym z uwagi na współpracę z belką AC rzeczywiste położenie punktu C układu przypadnie w miejscu C_3 . Z warunku odkształceń (rys. 2.18b) znajdujemy

$$\frac{\Delta l_t - \Delta l_2}{3 \sin \beta} = \frac{\Delta l_1}{2}$$

przy czym

$$\Delta l_2 = \frac{S_2 l}{EF \sin \beta}$$

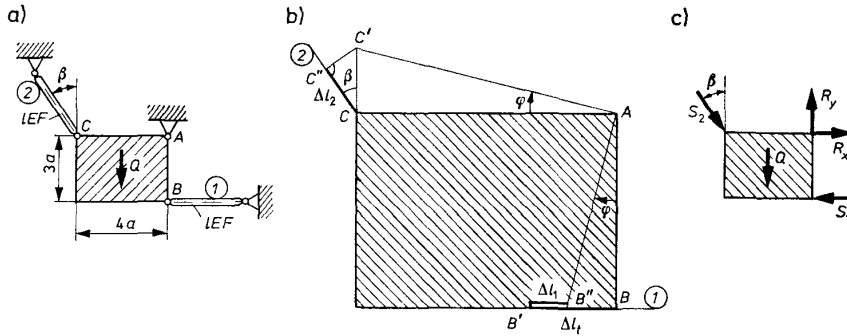
Na podstawie rysunku odkształceń sporządzamy rysunek sił (rys. 2.18c) i stąd (z równania równowagi) otrzymujemy

$$S_1 = \frac{3}{2} S_2 \sin \beta$$

Z powyższych równań znajdujemy

$$S_1 = \frac{6 \alpha \Delta t EF \sin \beta}{4 + 9 \sin^3 \beta}, \quad S_2 = \frac{4 \alpha \Delta t EF}{4 + 9 \sin^3 \beta}$$

Zadanie 2.19. Obliczyć siły w prętach przedstawionych na rys. 2.19, jeżeli pręt 1 został podgrzany o Δt ($^{\circ}\text{C}$).



Rys. 2.19. Do zadania 2.19

Rozwiązanie. Wskutek przyrostu temperatury pręt 1 wydłużyłby się o $\Delta l_t = l\alpha\Delta t$ (BB' na rys. 2.19b), lecz z powodu sprężystości układu zostanie on jednocześnie skrócony mechanicznie o $\Delta l_1 = B'B''$; ostatecznie pręt 1 wydłuży się o odcinek $BB'' = \Delta l_t - \Delta l_1$. Płyta obróci się o kąt φ , a pręt 2 ulegnie skróceniu o $CC' = \Delta l_2$.

Warunek odkształceń ma postać (dla $x = CC'$):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{4a} = \frac{\Delta l_t - \Delta l_1}{3a}$$

Po podstawieniu zależności $x \cos \beta = \Delta l_2$ oraz wykorzystaniu prawa Hooke'a otrzymamy

$$3S_2 = 4\alpha\Delta t EF \cos \beta - 4S_1 \cos \beta$$

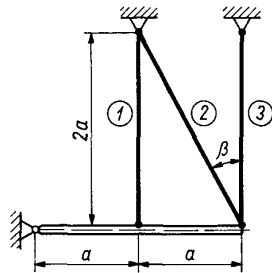
Zwroty sił w prętach przedstawiono na rys. 2.19c. Warunek równowagi ma postać

$$S_1 \cdot 3a = Q \cdot 2a + S_2 \cos \beta \cdot 4a$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy

$$S_1 = \frac{2(8\alpha\Delta t EF \cos^2 \beta + 3Q)}{9 + 16 \cos^2 \beta}, \quad S_2 = \frac{4 \cos \beta (3\alpha\Delta t EF - 2Q)}{9 + 16 \cos^2 \beta}$$

Zadanie 2.20. Obliczyć siły w prętach układu przedstawionego na rys. 2.20, jeżeli pręt 3 został ogrzany do Δt ($^{\circ}\text{C}$).



Rys. 2.20. Do zadania 2.20

ODPOWIEDŹ. Warunek odkształceń jest następujący: $2\Delta l_1 = \Delta l_2 - \Delta l_3 = \frac{\Delta l_2}{\cos \beta}$,
zaś siły w prętach są odpowiednio równe

$$S_1 = \frac{50EF\alpha\Delta t}{125 + 32\sqrt{5}}, \quad S_2 = \frac{80EF\alpha\Delta t}{125 + 32\sqrt{5}}, \quad S_3 = \frac{(25 + 32\sqrt{5})EF\alpha\Delta t}{125 + 32\sqrt{5}}$$

Zadanie 2.21. Obliczyć, jakie naprężenia powstają w szynach kolejowych, jeżeli tor (bezстыkowy) był układany w temperaturze $+20^\circ\text{C}$, a w zimie temperatura spadała do -30°C , zaś w lecie szyny nagrzały się do $+60^\circ\text{C}$. Współczynnik rozszerzalności cieplnej stali $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Rozwiązanie. Ponieważ tor jest bezстыkowy, więc spełnione są zależności

$$\varepsilon_m + \varepsilon_t = 0$$

oraz

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma}{E}, \quad \varepsilon_t = \alpha\Delta t$$

stąd

$$\sigma = \alpha\Delta t E$$

Po podstawieniu do powyższego wzoru konkretnych wartości otrzymamy następujące wartości naprężeń:

– w zimie

$$\sigma = 50 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 2,1 \cdot 10^5 = +126 \text{ MPa}$$

– w lecie

$$\sigma = -40 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 2,1 \cdot 10^5 = -100,8 \text{ MPa}$$

Zadanie 2.22. Na rurę miedzianą o średnicy zewnętrznej $d = 20 \text{ cm}$ i grubości $g_m = 3 \text{ mm}$ nałożono bez luzu i wcisku rurę stalową o grubości $g_{st} = 4 \text{ mm}$ (rys. 2.21). Obliczyć naprężenia w miedzi i stali oraz ciśnienie, z jakim rura miedziana działa na rurę stalową, jeżeli układ został podgrzany o $\Delta t = 100^\circ\text{C}$.

R o z w i ą z a n i e. Wydłużenie względne promienia rury miedzianej spowodowane przyrostem temperatur jest zmniejszone działaniem obwodowych naprężeń ściskających wywołanych ciśnieniem q , z jakim rura stalowa działa na miedzianą

$$\varepsilon_m = \alpha_m \Delta t - \frac{\sigma_m}{E_m}$$

Wydłużenie względne promienia rury stalowej jest spowodowane przyrostem temperatury i działaniem ciśnienia q

$$\varepsilon_{st} = \alpha_{st} \Delta t + \frac{\sigma_{st}}{E_{st}}$$

Odształcenia obwodowe i promieniowe obu rur są równe, przeto możemy napisać

$$\alpha_m \Delta t - \frac{\sigma_m}{E_m} = \alpha_{st} \Delta t + \frac{\sigma_{st}}{E_{st}} \quad (a)$$

W powyższym równaniu występują dwie niewiadome: σ_m i σ_{st} . Drugie równanie otrzymamy z warunków równowagi półpierścienia o długości jednostkowej, wyciętego z rury dwoma płaszczyznami prostopadłymi do osi rury (rys. 2.21)

$$\sigma_{st} g_{st} = \sigma_m g_m \quad (b)$$

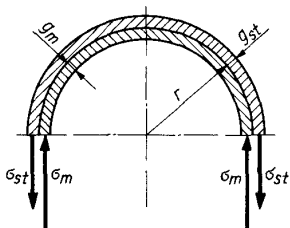
Po podstawieniu do równania (a) zależności (b) i danych liczbowych, podanych w treści zadania i w tabl. 21.1, otrzymamy

$$1,7 \cdot 10^{-5} \cdot 100 - \frac{\sigma_m}{1,1 \cdot 10^5} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 100 + \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} \sigma_m \frac{3}{4}$$

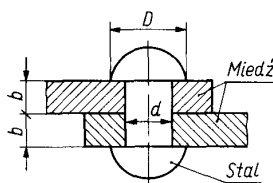
zatem

$$\sigma_{st} = 39,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{st} = \sigma_m \frac{g_m}{g_{st}} = 39,5 \cdot \frac{3}{4} = 29,6 \text{ MPa}$$



Rys. 2.21. Do zadania 2.22



Rys. 2.22. Do zadania 2.23

stąd ciśnienie q jest równe

$$q = \frac{2\sigma_m g_m}{d} = \frac{2 \cdot 39,5 \cdot 3}{400} = 0,6 \text{ MPa}$$

Zadanie 2.23. Dwie blachy miedziane o grubości $b = 2 \text{ cm}$ są połączone nitem stalowym o średnicy $d = 2 \text{ cm}$ (rys. 2.22). Średnice łbów nita wynoszą $D = 3 \text{ cm}$. Obliczyć naprężenia w nicie, gdy układ zostanie podgrzany o $\Delta t = 100^\circ\text{C}$.

Rozwiązanie. Swobodne wydłużenia termiczne stali i miedzi wynoszą

$$\lambda_{ts} = \alpha_s \Delta t 2b$$

$$\lambda_{tm} = \alpha_m \Delta t 2b$$

Z tablicy 21.1 odczytujemy współczynnik rozszerzalności liniowej dla miedzi

$$\alpha_m = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C}$$

Ponieważ swobodne wydłużenie miedzi jest większe od swobodnego wydłużenia stalowego nita, przeto w nicie powstanie siła rozciągająca R i na zasadzie akcji i reakcji taka sama siła będzie ściskać blachy miedziane.

Dla uproszczenia przyjmuje się, że naprężenia ściskające w miedzi obejmują jedynie obszar walca o średnicy D łba nita. Skrócenie mechaniczne miedzi wywołane siłą R wynosi więc

$$\lambda_{mm} = \frac{R \cdot 2b}{E_m F_m}$$

a wydłużenie mechaniczne stali

$$\lambda_{ms} = \frac{R \cdot 2b}{E_s F_s}$$

Wydłużenie całkowite stali od przyrostu temperatury i od siły rozciągającej R

$$\lambda_s = \lambda_{ts} + \lambda_{ms}$$

musi być równe wydłużeniu całkowitemu miedzi, tj. wydłużeniu od przyrostu temperatury i skróceniu od siły ściskającej R

$$\lambda_m = \lambda_{tm} - \lambda_{mm}$$

zatem

$$\lambda_{ts} + \lambda_{ms} = \lambda_{tm} - \lambda_{mm}$$

Po podstawieniu otrzymamy

$$\alpha_s \Delta t \cdot 2b + \frac{R \cdot 2b}{E_s F_s} = \alpha_m \Delta t \cdot 2b - \frac{R \cdot 2b}{E_m F_m}$$

Wykorzystując dane liczbowe podane w treści zadania i w tabl. 21.1, otrzymamy

$$R = 13\,000 \text{ N}$$

Napężenia w nicie stalowym i miedzi są odpowiednio równe

$$\sigma_s = \frac{R}{F_s} = 41.5 \text{ MPa}, \quad \sigma_m = \frac{R}{F_m} = 33.3 \text{ MPa}$$

Zadanie 2.24. Wyznaczyć napężenia, jakie powstaną w pręcie pokazanym na rys. 2.7 przy założeniu, że siła $P = 0$, natomiast pręt został podgrzany o $\Delta t = 100^\circ\text{C}$.

ODPOWIEDŹ:

$$R = 3E\alpha\Delta t \frac{F_1 F_2}{F_1 + 2F_2}, \quad \sigma_1 = \frac{R}{F_1} = 300 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \frac{R}{F_2} = 150 \text{ MPa}$$

Zadanie 2.25. Obliczyć, jakie napężenia powstaną w układzie przedstawionym na rys. 2.11, jeżeli siły P oraz Q są równe zero, natomiast układ zostanie podgrzany o $\Delta t = 100^\circ\text{C}$. Dane dodatkowe: $\alpha_m = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$, $\alpha_{st} = 1.1 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$.

ODPOWIEDŹ:

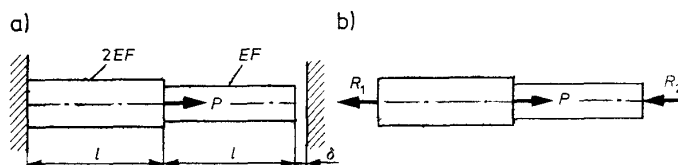
$$\sigma_1 = \sigma_3 = 28 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = -56 \text{ MPa}$$

Zadanie 2.26. Obliczyć, jakie napężenia powstaną w prętach układu pokazanego na rys. 2.11, jeżeli równocześnie z działaniem siły $Q = 5 \text{ kN}$ i siły $P = 15 \text{ kN}$ pręty zostaną podgrzane o $\Delta t = 150^\circ\text{C}$.

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_1 = 63 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = -64 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = 101 \text{ MPa}$$

Zadanie 2.27. Pręt o skokowo zmiennym przekroju został umieszczony między dwiema sztywnymi nieprzesuwnymi ścianami z luzem δ (rys. 2.23). Obliczyć napężenia w pręcie, jeżeli zostanie on obciążony osiową siłą P .



Rys. 2.23. Do zadania 2.27

Rozwiązanie. Luz zostanie skasowany przy wartości siły $P = P_1$, wynikającej z zależności

$$\delta = \frac{P_1 l}{2EF}$$

Stąd

$$P_1 = \frac{2\delta EF}{l}$$

Gdy siła $P > P_1$, luz zostanie zlikwidowany i reakcje pojawią się w obu ścianach (rys. 2.23b), przy czym $P = R_1 + R_2$. Całkowite odkształcenie pręta obciążonego siłą P i reakcjami R_1 i R_2 wynosi δ

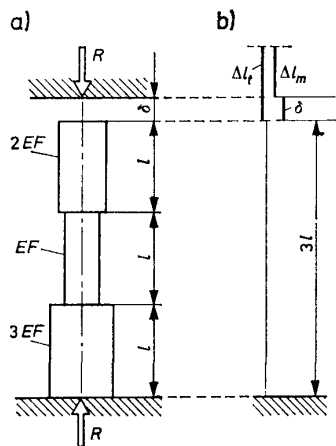
$$\Delta l_c = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{R_1 l}{2EF} + \frac{(R_1 - P)l}{EF} = \delta$$

zatem

$$R_1 = \frac{2}{3} \frac{\delta EF}{l} + \frac{2}{3} P, \quad R_2 = \frac{1}{3} P - \frac{2}{3} \frac{\delta EF}{l}$$

Lewa część pręta jest rozciągana naprężeniami $\sigma_1 = R_1/2F$, zaś prawa jest ściskana naprężeniami $\sigma_2 = R_2/F$.

Zadanie 2.28. Pręt umieszczono między sztywnymi, nieprzesuwnymi ścianami, a następnie ogrzano go o $\Delta t^\circ\text{C}$ (rys. 2.24). Obliczyć największe naprężenia w pręcie. Dane: l, E, F, α, δ .



Rys. 2.24. Do zadania 2.28

Rozwiązanie. Luz δ zniknie przy wzroście temperatury Δt_0 , obliczonej z zależności

$$\Delta l_0 = 3l\alpha\Delta t_0 = \delta$$

Gdy $\Delta t > \Delta t_0$, w ścianach wystąpią reakcje R . Na skutek wydłużenia termicznego Δl_t i skrócenia mechanicznego wywołanego reakcjami ścian Δl_m pręt wydłuży się o δ (rys. 2.24b). Warunek odkształceń ma postać

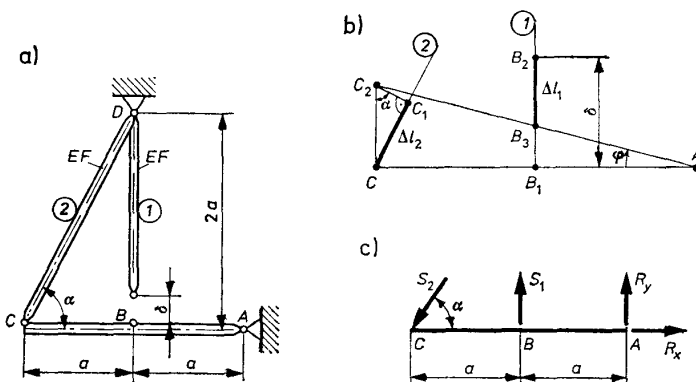
$$\Delta l_t = \Delta l_m + \delta$$

Odkształcenia wynoszą

$$\Delta l_t = 3l\alpha\Delta t$$

$$\Delta l_m = \frac{Rl}{2EF} + \frac{Rl}{EF} + \frac{Rl}{3EF} = \frac{11}{6} \frac{Rl}{EF}$$

Zadanie 2.29. Obliczyć siły, jakie powstaną w prętach po zmontowaniu układu przedstawionego na rys. 2.25a. Pręt l wykonano za krótki i szczelina wynosi δ . Belka AB jest sztywna i lekka.



Rys. 2.25. Do zadania 2.29

Rozwiązanie. Po zmontowaniu układu przegub B zajmie położenie między punktami B_1 i B_2 (rys. 2.25b), np. w punkcie B_3 . Z rysunku przemieszczeń (rys. 2.25b) wynika równanie (dla $x = CC_2$)

$$\frac{\delta - \Delta l_1}{a} = \frac{x}{2a}$$

Wykorzystując zależności: $\Delta l_2 = x \sin \alpha$ (z trójkąta CC_1C_2), $\sin \alpha = 2/\sqrt{5}$ (z trójkąta CBD – rys. 2.25a) oraz prawo Hooke'a, otrzymujemy warunek

$$5aS_2 = 4\delta EF - 8aS_1$$

Suma momentów względem punktu A daje równanie

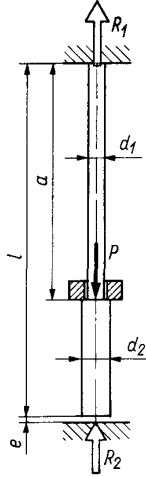
$$S_1 a = S_2 \cdot 2a \sin \alpha$$

stąd

$$S_1 = \frac{16\delta EF}{a(23 + 5\sqrt{5})}, \quad S_2 = \frac{4\sqrt{5}\delta EF}{a(32 + 5\sqrt{5})}$$

Akademia Górniczo - Hutnicza
im. Stanisława Staszica
WYDZIAŁ INŻYNIERII
MECHANICZNEJ I ROBOTYKI
BIBLIOTEKA

Zadania 2.30. Pręt stalowy o zmiennej średnicy $d_1 = 2 \text{ cm}$, $d_2 = 3 \text{ cm}$ utwierdzono w górnym końcu w ten sposób, że dolny koniec pręta jest oddalony od nieodkształcalnego podłoża o wielkość $e = 1 \text{ mm}$. Cieńszą część pręta obejmuje luźny pierścień, który opiera się o część grubszą w sposób podany na rys. 2.26. Obliczyć naprężenia w pręcie, jeżeli pierścień działa na pręt siłą $P = 50 \text{ kN}$. Długość pręta $l = 3 \text{ m}$, długość części cieńszej $a = 2 \text{ m}$.



Rys. 2.26. Do zadania 2.30

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_1 = \frac{R_1}{F_1} = 116 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \frac{R_2}{F_2} = 19 \text{ MPa}$$

Zadanie 2.31. Wyznaczyć dopuszczalną wartość siły P , jaką można obciążyć pręt (układ) podany na rys. 2.26, jeżeli naprężenia dopuszczalne dla pręta wynoszą $k_r = 160 \text{ MPa}$, $k_c = 30 \text{ MPa}$.

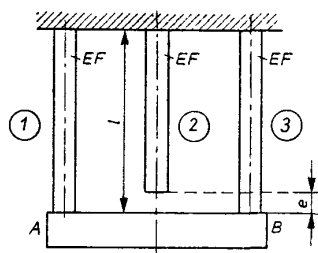
ODPOWIEDŹ:

$$P = 97 \text{ kN}$$

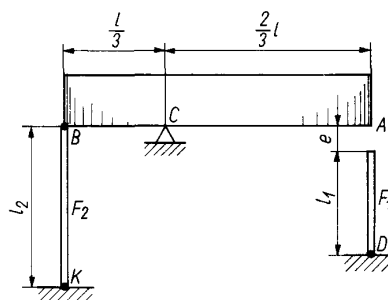
Zadanie 2.32. Obliczyć, jakie naprężenia (po wyrównaniu temperatur) powstaną w prętach układu pokazanego na rys. 2.27, jeżeli pręt środkowy zostanie podgrzany (np. palnikiem) w celu skasowania luzu e i przyspawany do nieodkształcalnej belki AB .

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = -\frac{eE}{3l}, \quad \sigma_2 = +\frac{2eE}{3l}$$



Rys. 2.27. Do zadania 2.32



Rys. 2.28. Do zadania 2.33

Zadanie 2.33. Obliczyć, jakie naprężenia powstaną w prętach układu podanego na rys. 2.28 (po wyrównaniu temperatur), jeżeli w celu skasowania luzu e pręt I podgrzejemy i przyspawamy do nieodkształcalnej płyty AB . Dane liczbowe: $e = 2 \text{ mm}$, $l_1 = 80 \text{ cm}$, $l_2 = 120 \text{ cm}$, $F_1 = F_2 = 4 \text{ cm}^2$, $E_1 = E_2 = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_1 = 52,5 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 105 \text{ MPa}$$

Zadanie 2.34. Obliczyć naprężenia w śrubie i w tulejce z zadania 2.16, jeżeli dokręcimy nakrętkę w celu skasowania luzu i ogrzejemy układ o Δt ($^{\circ}\text{C}$). Współczynniki rozszerzalności liniowej spełniają zależność $\alpha_r > \alpha_s$.

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_s = \frac{(\alpha_r - \alpha_s)\Delta t E_s}{1 + \frac{F_s E_s}{F_r E_r}}, \quad \sigma_r = -\frac{(\alpha_r - \alpha_s)\Delta t E_s}{\frac{F_r}{F_s} + \frac{E_s}{E_r}}$$

Zadanie 2.35. W układzie podanym na rys. 2.29 wyznaczyć naprężenia w prętach I i 2 dla następujących obciążeń:

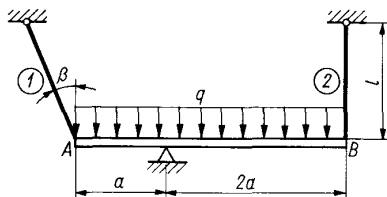
- działa tylko obciążenie ciągłe q ,
- $q = 0$, pręt I podgrzano o Δt ,
- $q = 0$, pręt I jest krótszy o e i w celu skasowania luzu podgrzano go i przyspawano do belki AB . Belka AB jest lekka i nieodkształcalna.

ODPOWIEDŹ:

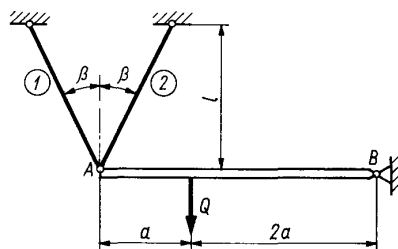
$$\text{a) } \sigma_1 = -\frac{3qa \cos^2 \beta}{2F(4 + \cos^3 \beta)}, \quad \sigma_2 = +\frac{3qa}{F(4 + \cos^3 \beta)}$$

$$\text{b) } \sigma_1 = -\frac{4\alpha \Delta t E}{(4 + \cos^3 \beta)}, \quad \sigma_2 = -\frac{2\alpha \Delta t E \cos \beta}{(4 + \cos^3 \beta)}$$

$$\text{c) } \sigma_1 = +\frac{4eE \cos \beta}{l(4 + \cos^3 \beta)}, \quad \sigma_2 = +\frac{2eE \cos^2 \beta}{l(4 + \cos^3 \beta)}$$



Rys. 2.29. Do zadania 2.35



Rys. 2.30. Do zadania 2.36

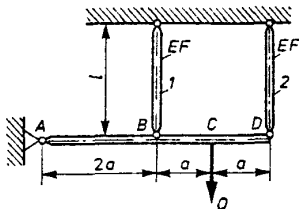
Zadanie 2.36. Belka AB podparta przegubowo w końcu B jest zawieszona końcem A na dwóch jednakowych prętach jak na rys. 2.30. Mając dane: a, l, β, EF , wyznaczyć siły w prętach dla następujących obciążeń:

- działa tylko siła Q ,
- pręt 1 podgrzano o Δt ,
- pręt 2 jest krótszy o e od pręta 1 i dlatego przy montażu podgrzano go w celu skasowania luzu e .

ODPOWIEDŹ:

- $S_1 = S_2 = \frac{Q}{3 \cos \beta}$
- $S_2 = 0,5EF\alpha\Delta t, \quad S_1 = -S_2$
- $S_1 = -\frac{e}{2l}EF \cos \beta, \quad S_2 = \frac{e}{2l}EF \cos \beta = -S_1$

Zadanie 2.37. Stosując metodę naprężeń dopuszczalnych oraz metodę nośności granicznej, wyznaczyć dopuszczalną wartość siły Q , jaką można obciążyć układ podany na rys. 2.31. Belka AB jest nieodkształcalna; ciężaru własnego nie uwzględniać. Dane liczbowe: granica plastyczności prętów $R_e = 240 \text{ MPa}$, $F = 4 \text{ cm}^2$, współczynnik bezpieczeństwa $n = 1,5$.



Rys. 2.31. Do zadania 2.37

Rozwiązanie. Ze statyki oraz z zależności między wydłużeniami prętów $\lambda_2 = 2\lambda_1$ wyznaczamy siły w prętach

$$S_1 = \frac{3Q}{10}, \quad S_2 = 2S_1 = \frac{3Q}{5}$$

a) *Metoda naprężeń dopuszczalnych*

$$k_r = \frac{R_e}{n} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{S_2}{F} \leq k_r$$

stąd

$$Q_1 = \frac{5}{3} F k_r = \frac{5}{3} \cdot 400 \cdot 160 = 107 \text{ kN}$$

b) *Metoda nośności granicznej.* Zgodnie z tą metodą, gdy naprężenia w prętach osiągną granicę plastyczności, siły w tych prętach będą równe

$$S_1 = S_2 = F R_e = 400 \cdot 240 = 96 \text{ kN}$$

Z równania równowagi ($\sum M_A = 0$) znajdujemy

$$Q = 2 \cdot 96 = 192 \text{ kN}$$

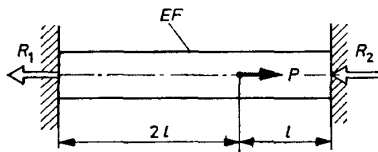
Uwzględniając współczynnik bezpieczeństwa, dopuszczalna wartość siły Q wynosi

$$Q_2 = \frac{Q}{n} = \frac{192}{1,5} = 128 \text{ kN}$$

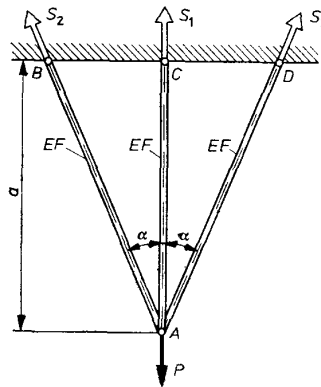
Zadanie 2.38. Stosując metodę naprężeń dopuszczalnych i nośności granicznej, obliczyć maksymalną wartość siły P , jaką można obciążyć pręt przedstawiony na rys. 2.32. Dane: granica plastyczności R_e , współczynnik bezpieczeństwa n .

ODPOWIEDŹ

$$P_1 = 1,5 F R_e / n, \quad P_2 = 2 F R_e / n$$



Rys. 2.32. Do zadania 2.38



Rys. 2.33. Do zadania 2.39

Zadanie 2.39. Obliczyć dopuszczalną wartość siły P , jaką można obciążyć układ prętów przedstawiony na rys. 2.33. Dane: $\alpha = 45^\circ$, $F = 4 \text{ cm}^2$, granica plastyczności $R_e = 240 \text{ MPa}$, współczynnik bezpieczeństwa $n_e = 1,6$. Obliczenia wykonać za pomocą metody naprężeń dopuszczalnych i nośności granicznej.

ODPOWIEDŹ:

1. *Metoda naprężeń dopuszczalnych*

$$S_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}, \quad S_2 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}, \quad P_{dop} = 102,5 \text{ kN}$$

2. *Metoda nośności granicznej*

$$P_{dop} = \frac{FR_e(1 + 2 \cos \alpha)}{n_e} = 144,5 \text{ kN}$$

Analiza naprężeń i odkształceń

3

Wprowadzenie

W dwukierunkowym (płaskim) stanie naprężenia w dowolnym przekroju określonym kątem α naprężenia normalne i styczne wyznaczamy ze wzorów

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \quad (3.1)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha \quad (3.2)$$

gdzie: σ_1 i σ_2 – naprężenia główne, σ_{α} i τ_{α} – naprężenia normalne i styczne w przekroju a-b, którego normalna tworzy kąt α z kierunkiem naprężeń σ_1 (rys. 3.1a).

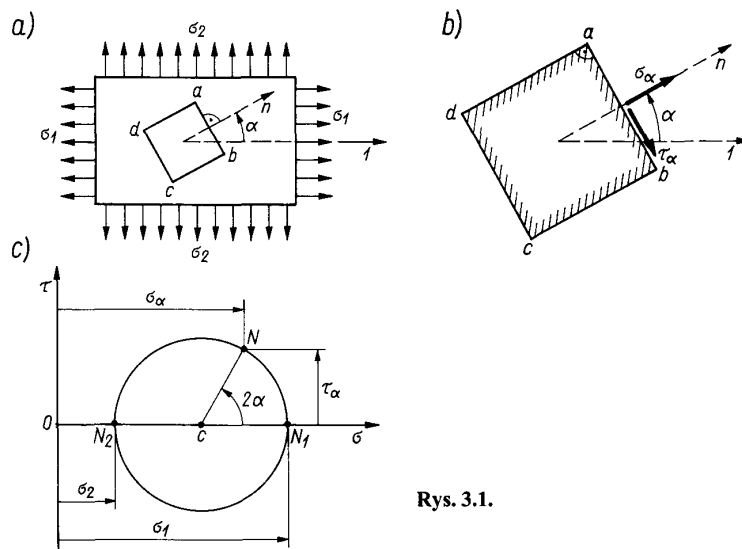
Aby wyraźniej oznaczyć zwroty (przyjęte za dodatnie) naprężeń σ_{α} i τ_{α} na rys. 3.1b przedstawiono element prostopadłościenny $abcd$, wyodrębniony (w myśli) z badanego ciała (blachy, powłoki).

Analizę naprężeń wygodnie jest przeprowadzać za pomocą koła Mohra (rys. 3.1c). W przyjętej skali, w układzie współrzędnych σ - τ , określamy położenie środka C koła: $OC = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ i kreślimy okrąg promieniem

$$CN_1 = CN_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

Współrzędne punktu N , określonego promieniem CN tworzącym z osią σ kąt 2α , wyznaczają wartości naprężeń σ_{α} i τ_{α} zgodnie ze wzorami (3.1) i (3.2).

Analizę odkształceń dla trójkierunkowego (przestrzennego) stanu naprężeń przeprowadzamy przy zastosowaniu wzorów, zwanych *uogólnionym prawem Hooke'a*



Rys. 3.1.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\
 \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\
 \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

gdzie: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – naprężenia główne, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – odkształcenia względne odpowiadające kierunkom naprężeń głównych, E – moduł Younga, ν – liczba (współczynnik) Poissona.

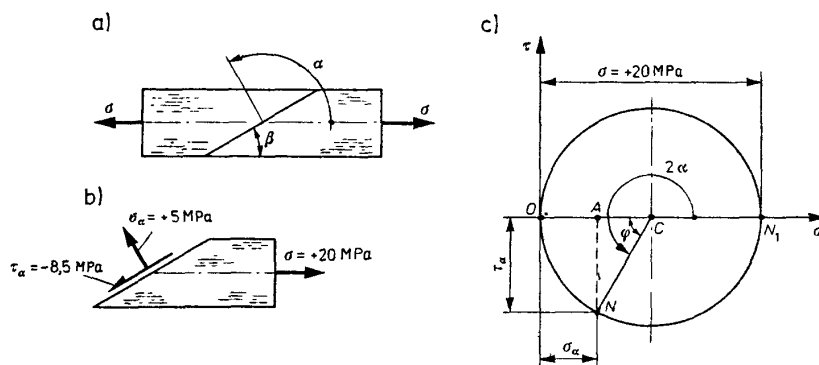
Zadanie 3.1. Obliczyć naprężenia występujące w przekroju, określonym kątem $\beta = 30^\circ$, płaskownika rozciąganego naprężeniami $\sigma = 20$ MPa. Zadanie rozwiązać metodą analityczną i wykreślić (koło Mohra).

Rozwiązanie. Położenie przekroju jest określone za pomocą kąta α zawartego między kierunkiem naprężeń σ a normalną do przekroju, odmierzanego w kierunku trygonometrycznym (przeciwnym do ruchu wskazówek zegara). Z rysunku 3.2a wynika, że

$$\alpha = 90^\circ + \beta = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

1. *Metoda analityczna.*

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha = 20 \cos^2 120^\circ = 20(-\sin 30^\circ)^2 = +5 \text{ MPa}$$



Rys. 3.2. Do zadania 3.1

$$\tau_{\alpha} = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot 20 \sin 240^{\circ} = -5\sqrt{3} \approx -8,66 \text{ MPa}$$

Zwroty naprężeń przedstawiono na rys. 3.2b.

2. *Metoda wykreślna (koło Mohra)*. Rysujemy koło Mohra oparte na średnicy $ON_1 = \sigma = +20 \text{ MPa}$.

Kąt środkowy odmierzony w kierunku trygonometrycznym $2\alpha = 240^{\circ}$ wyznacza na okręgu punkt N , którego współrzędnymi są składowe naprężeń w badanym przekroju

$$\sigma_{\alpha} = \overline{OC} - \overline{AC} = \frac{1}{2} \sigma - \frac{1}{2} \sigma \cos \varphi = 10 - 10 \cos 60^{\circ} = +5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\alpha} = -\overline{AN} = -\frac{1}{2} \sigma \sin \varphi = -10 \cdot 0,866 = -8,66 \text{ MPa}$$

Kąt φ jest kątem ostrym trójkąta ACN , przy czym $\varphi = 2\alpha - 180^{\circ} = 60^{\circ}$.

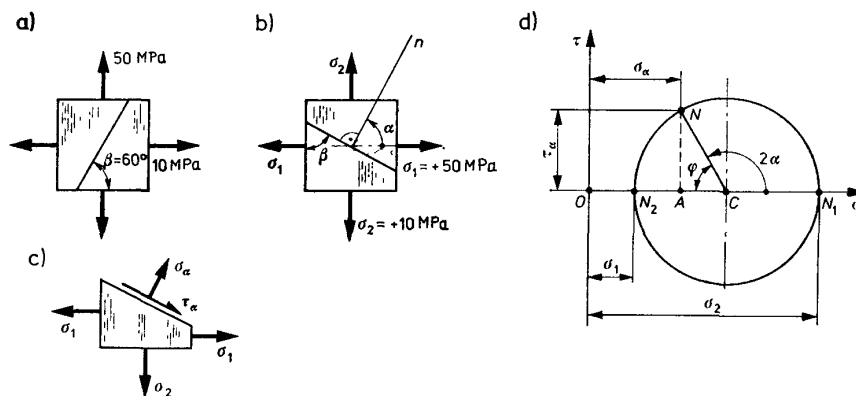
Zadanie 3.2. Dla płyty przedstawionej na rys. 3.3a wyznaczyć naprężenia w przekroju określonym kątem $\beta = 60^{\circ}$. Zadanie rozwiązać metodą analityczną i wykreślną.

Rozwiązanie. Naprężenia większe, algebraiczne oznaczamy $\sigma_1 = +50 \text{ MPa}$ i kierujemy je poziomo (rys. 3.3b), a więc naprężenie mniejsze $\sigma_2 = +10 \text{ MPa}$. Kąt α jest mierzony od kierunku naprężeń większych do normalnej n przekroju i wynosi $\alpha = \beta = 60^{\circ}$.

1. *Metoda analityczna*. Korzystając ze wzorów (3.1) i (3.2), dla $\sigma_1 = 50$ oraz $\sigma_2 = 10$ znajdujemy

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = 50 \cos^2 60^{\circ} + 10 \sin^2 60^{\circ} = +20 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha = \frac{1}{2} (50 - 10) \sin 120^{\circ} = +17 \text{ MPa}$$



Rys. 3.3. Do zadania 3.2

2. *Metoda wykreślna.* Kreślimy okrąg Mohra oparty na średnicy $\overline{N_1N_2}$ (rys. 3.3d). Kąt środkowy $2\alpha = 120^\circ$ wyznacza punkt N o współrzędnych σ_α i τ_α . Położenie środka okręgu jest wyznaczone odcinkiem $\overline{OC}$

$$\overline{OC} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2}(50 + 10) = 30 \text{ MPa}$$

promień okręgu jest równy

$$r = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2}(50 - 10) = 20 \text{ MPa}$$

a kąt ostry φ trójkąta ACN wynosi

$$\varphi = 180^\circ - 2\alpha = 60^\circ$$

Napężenie normalne i napężenie styczne odpowiednio wynoszą

$$\sigma_\alpha = \overline{OC} - \overline{AC} = \overline{OC} - r \cos \varphi = 30 - 20 \cos 60^\circ = +20 \text{ MPa}$$

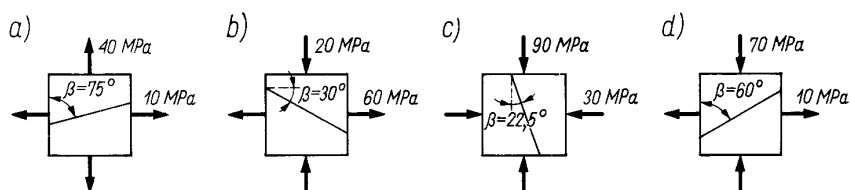
$$\tau_\alpha = +\overline{AN} = +r \sin \varphi = +20 \sin 60^\circ = +17 \text{ MPa}$$

Zwroty naprężeń podano na rys. 3.3c.

Zadanie 3.3. Dla układów przedstawionych na rys. 3.4a, b, c, d wyznaczyć naprężenia normalne i styczne w przekroju określonym kątem β .

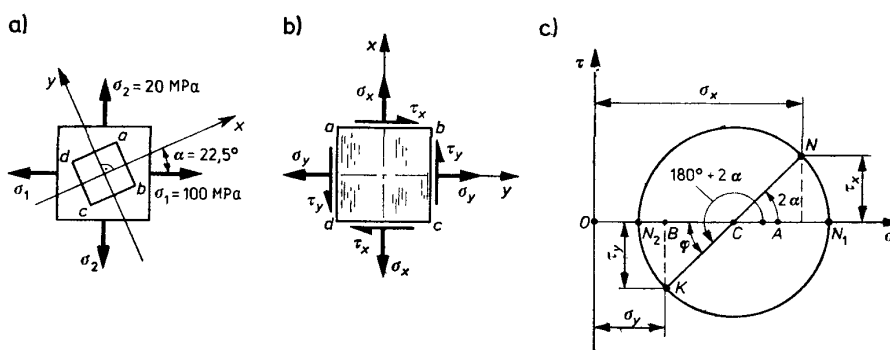
ODPOWIEDŹ:

- a) $\sigma = +38,0 \text{ MPa}$, $\tau = +7,5 \text{ MPa}$
- b) $\sigma = 0$, $\tau = +34,6 \text{ MPa}$
- c) $\sigma = -38,8 \text{ MPa}$, $\tau = +21,2 \text{ MPa}$
- d) $\sigma = -50, \text{ MPa}$, $\tau = -34,6 \text{ MPa}$



Rys. 3.4. Do zadania 3.3

Zadanie 3.4. Wyznaczyć naprężenia działające na ściankach elementu prostokątnego $abcd$ wyciętego z płyty rozciąganej naprężeniami $\sigma_1 = 100 \text{ MPa}$ i $\sigma_2 = 20 \text{ MPa}$.



Rys. 3.5. Do zadania 3.4

Rozwiązanie. Przekroje $a-b$ i $c-d$ są określone kątem $\alpha = 22,5^\circ$, zaś przekroje $b-c$ i $a-d$ kątem $90^\circ + \alpha = 112,5^\circ$.

Konstrukcja koła Mohra jest pokazana na rys. 3.5c. Położenie środka koła określa odcinek $\overline{OC}$

$$\overline{OC} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2}(100 + 20) = 60 \text{ MPa}$$

Promień jest równy

$$r = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2}(100 - 20) = 40 \text{ MPa}$$

Z trójkąta BCK wynika, że kąt $\varphi = 2\alpha = 45^\circ$.

Naprężenia na ściankach $a-b$ i $c-d$ są określone współrzędnymi punktu N

$$\sigma_x = \overline{OC} + \overline{AC} = \overline{OC} + r \cos 2\alpha = 60 + 40 \cos 45^\circ = +88 \text{ MPa}$$

$$\tau_x = +\overline{AN} = +r \sin 2\alpha = +40 \sin 45^\circ = +28 \text{ MPa}$$

a naprężenia na ściankach $b-c$ i $a-d$ – współrzędnymi punktu K

$$\sigma_y = \overline{OC} - \overline{BC} = \overline{OC} - r \cos \varphi = 60 - 40 \cos 45^\circ = +32 \text{ MPa}$$

$$\tau_y = -\overline{BK} = -r \sin \varphi = -40 \sin 45^\circ = -28 \text{ MPa}$$

Naprężenia na ściankach elementu $abcd$ przedstawiono na rys. 3.5b.

Zadanie 3.5. Dane są naprężenia główne w prostokątnym elemencie znajdującym się w płaskim stanie naprężenia:

a) $\sigma_1 = 400 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = -300 \text{ MPa}$

b) $\sigma_1 = 500 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 500 \text{ MPa}$

c) $\sigma_1 = 1000 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0$

Wyznaczyć naprężenia działające w przekroju, którego normalna jest nachylona do osi 1 pod kątem $\alpha = 30^\circ$, stosując najpierw metodę analityczną, a następnie wykreślną (koło Mohra).

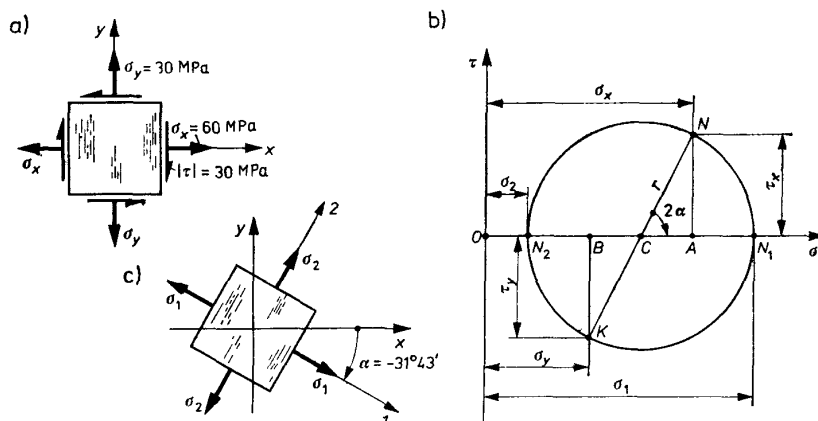
ODPOWIEDŹ:

a) $\sigma_\alpha = 225 \text{ MPa}, \quad \tau_\alpha = 303 \text{ MPa}$

b) $\sigma_\alpha = 500 \text{ MPa}, \quad \tau_\alpha = 0$

c) $\sigma_\alpha = 750 \text{ MPa}, \quad \tau_\alpha = 432 \text{ MPa}$

Zadanie 3.6. Na ściankach elementu prostokątnego (rys. 3.6) działają naprężenia rozciągające $\sigma_x = 60 \text{ MPa}$ i $\sigma_y = 30 \text{ MPa}$ oraz naprężenia tnące $\tau = 30 \text{ MPa}$. Obliczyć wartości naprężeń głównych oraz wyznaczyć ich kierunki.



Rys. 3.6. Do zadania 3.6

Rozwiązanie. Rysujemy koło Mohra oparte na średnicy NK , przy czym współrzędne punktu N wynoszą σ_x oraz $\tau_x = +\tau$, a punktu K odpowiednio σ_y oraz $\tau_y = -\tau$. Współrzędna środka koła jest równa

$$\overline{OC} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(60 + 30) = 45 \text{ MPa}$$

promień koła (z trójkąta CAN)

$$r = \sqrt{\tau_x^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2} = \sqrt{30^2 + \left(\frac{60 - 30}{2}\right)^2} = 33,5 \text{ MPa}$$

Napężenia główne wynoszą

$$\sigma_1 = \overline{OC} + r = 45 + 33,5 = 78,5 \text{ MPa}$$

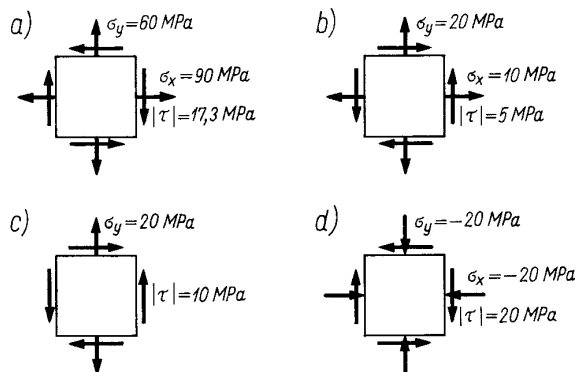
$$\sigma_2 = \overline{OC} - r = 45 - 33,5 = 11,5 \text{ MPa}$$

Kąt między osią x a osią większych naprężeń głównych (z trójkąta CAN) obliczamy ze wzoru

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 30}{60 - 30} = 2, \quad \text{stad} \quad 2\alpha = 63^\circ 26' \quad \text{i} \quad \alpha = 31^\circ 43'$$

Kąt α odkładamy, tak jak na rys. 3.6b, w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara ($\alpha = -31^\circ 43'$). Kierunki i zwroty naprężeń głównych są pokazane na rys. 3.6c.

Zadanie 3.7. Dla układów przedstawionych na rys. 3.7 a, b, c, d obliczyć wartości naprężeń głównych oraz określić ich kierunki.

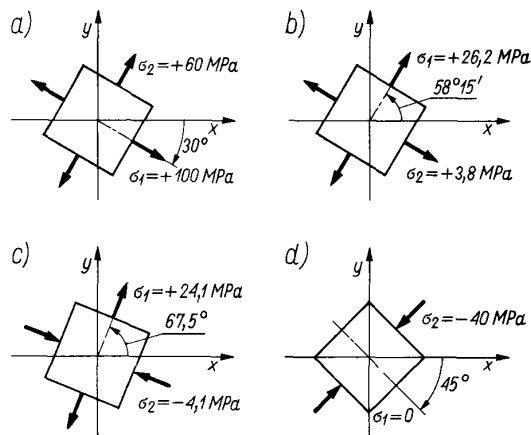


Rys. 3.7. Do zadania 3.7

ODPOWIEDŹ:

- a) $\sigma_1 = +100 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = +60 \text{ MPa}$, $\alpha = -30^\circ$
- b) $\sigma_1 = +26,2 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = +3,8 \text{ MPa}$, $\alpha = +58^\circ 15'$
- c) $\sigma_1 = +24,1 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -4,1 \text{ MPa}$, $\alpha = +67,5^\circ$
- d) $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -40 \text{ MPa}$, $\alpha = -45^\circ$

Układy naprężeń głównych odpowiadające obliczonym wartościom przedstawiono na rys. 3.8.



Rys. 3.8. Do zadania 3.7
(odpowiedź)

Zadanie 3.8. Arkusz blachy stalowej o wymiarach początkowych: grubość $g = 20$ mm, szerokość $a = 1$ m, długość $l = 2$ m jest rozciągany w kierunku równoległym do dłuższych boków naprężeniami $\sigma_1 = 200$ MPa, zaś w kierunku równoległym do krótszych boków $\sigma_2 = 100$ MPa. Obliczyć wymiary arkusza poddanego działaniu naprężeń σ_1 i σ_2 . Moduł Younga $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, zaś liczba (współczynnik) Poissona $\nu = 0,3$.

Rozwiązanie. Odkształcenia względne w kierunkach głównych, zgodnie ze wzorami (3.3), dla $\sigma_3 = 0$ wynoszą

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = \frac{1}{2 \cdot 10^5}(200 - 0,3 \cdot 100) = 85 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) = \frac{1}{2 \cdot 10^5}(100 - 0,3 \cdot 200) = 20 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{E}\nu(\sigma_1 + \sigma_2) = -\frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot 0,3(200 + 100) = -45 \cdot 10^{-5}$$

Wymiary arkusza blachy (po obciążeniu) są równe

$$l = 2000(1 + \varepsilon_1) = 2001,7 \text{ mm}$$

$$a = 1000(1 + \varepsilon_2) = 1000,2 \text{ mm}$$

$$g = 20(1 + \varepsilon_3) = 19,99 \text{ mm}$$

Zadanie 3.9. Sześcian aluminiowy o boku $a = 50$ mm włożono bez luzu i wciśnię do dopasowanego otworu w nieodkształcalnym bloku i poprzez nieodkształcalną płytkę obciążono siłą $P = 300$ kN (rys. 3.9). Obliczyć naciski wywierane na kostkę przez ścianki boczne oraz obniżenie h płytki. Liczba (współczynnik) Poissona $\nu = 0,34$, moduł Younga $E = 0,7 \cdot 10^5$ MPa.

Rozwiązanie Kostka nie może rozszerzyć w kierunku osi x i osi y , a więc $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$. Jeżeli górna powierzchnia kostki obniży się o wielkość h , to odkształcenie względne (skrócenie) kostki w kierunku osi z wyniesie $\varepsilon_z = -h/a$. Naciski na kostkę w kierunku osi z wynoszą $\sigma_z = -P/a^2$, a w kierunku osi x i y są nieznanne $\sigma_x = -q_x$, $\sigma_y = -q_y$.

Stosując prawo Hooke'a dla trójwymiarowego stanu naprężeń, mamy

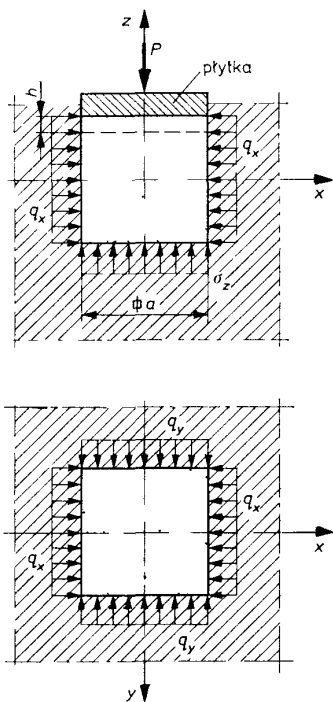
$$\varepsilon_x = \frac{-q_x}{E} - \nu \frac{-q_y}{E} - \nu \frac{-P/a^2}{E} = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{-q_y}{E} - \nu \frac{-q_x}{E} - \nu \frac{-P/a^2}{E} = 0$$

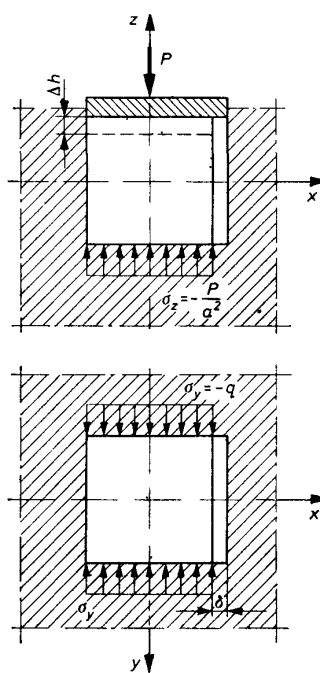
$$\varepsilon_z = \frac{-P/a^2}{E} - \nu \frac{-q_x}{E} - \nu \frac{-q_y}{E} = -\frac{h}{a}$$

Z równań tych otrzymujemy

$$q_x = q_y = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{P}{a^2} = \frac{0,34}{1-0,34} \frac{300 \cdot 10^3}{50^2} = 61,8 \text{ N/mm}^2$$



Rys. 3.9. Do zadania 3.9



Rys. 3.10. Do zadania 3.10

$$h = \frac{P}{aE} \left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right) = \frac{300 \cdot 10^3}{50 \cdot 0,7 \cdot 10^5} \left(1 - \frac{2 \cdot 0,34^2}{1-0,34} \right) = 0,056 \text{ mm}$$

Zadanie 3.10. Kostkę sześcienną o boku $a = 100 \text{ mm}$ wykonaną ze stali włożono do nieodkształcalnego otworu o takim samym wymiarze w kierunku osi y , a w kierunku osi x z luzem $\delta = 0,1 \text{ mm}$ (rys. 3.10). Obliczyć siłę P , przy której szczelina δ zniknie.

Rozwiązanie. Odkształcenia względne w kierunkach odpowiednich osi wynoszą $\varepsilon_x = \delta/a$, $\varepsilon_y = 0$, $\varepsilon_z = -\Delta h/a$, na naprężenia: $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = -q$, $\sigma_z = -P/a^2$. Z uogólnionego prawa Hooke'a znajdujemy

$$P = \frac{\delta a E}{\nu(1+\nu)} = 538 \text{ kN}$$

Zadanie 3.11. Walec miedziany o średnicy d i wysokości h włożono w dopasowany (bez luzu i wcisku) otwór wykonany w bloku stalowym (rys. 3.11). Obliczyć naciski na walec oraz zmianę wysokości walca po podgrzaniu go o Δt ($\alpha_m > \alpha_s$).

Rozwiązanie. Uogólnione prawo Hooke'a, z uwzględnieniem odkształceń cieplnych, ma postać

$$\varepsilon_x = \alpha \Delta t + \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = \alpha \Delta t + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E}$$

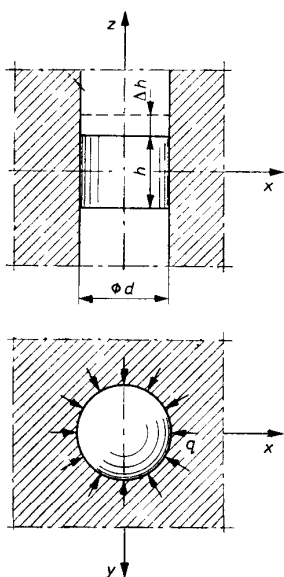
$$\varepsilon_z = \alpha \Delta t + \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$$

W omawianym przypadku odkształcenia i naprężenia w kierunkach osi x i y (w kierunku promieniowym) są równe, a więc dwa pierwsze równania są identyczne. Średnica otworu w bloku stalowym zwiększy się o $\Delta d = d \alpha_s \Delta t$ (pominiamy odkształcenia bloku spowodowane naciskami miedzianego walca), a więc $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \alpha_s \Delta t$. Ponieważ $\varepsilon_z = \Delta h/h$, $\sigma_x = \sigma_y = -q$ oraz $\sigma_z = 0$, stosując prawo Hooke'a, znajdujemy

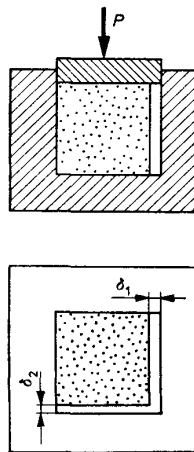
$$\alpha_s \Delta t = \alpha_m \Delta t + \frac{-q}{E} - \nu \frac{-q}{E}, \quad \frac{\Delta h}{h} = \alpha_m \Delta t - 2\nu \frac{-q}{E}$$

Stąd otrzymujemy

$$q = \frac{E(\alpha_m - \alpha_s)\Delta t}{1-\nu}, \quad \Delta h = h \Delta t \left[\alpha_m + \frac{2\nu(\alpha_m - \alpha_s)}{1-\nu} \right]$$



Rys. 3.11. Do zadania 3.11



Rys. 3.12. Do zadania 3.12

Zadanie 3.12. Kostkę sześcienną (rys. 3.12) o boku a włożono do nieodkształcalnego otworu z luzem δ_1 w kierunku osi x i δ_2 w kierunku osi y ($\delta_1 > \delta_2$). Obliczyć, przy jakiej sile ściskającej P obie szczeliny znikną.

ODPOWIEDŹ:

$$P = \frac{aE(\delta_1 + \nu\delta_2)}{\nu(1 + \nu)}$$

Zadanie 3.13. Sześcian o boku a wykonany z materiału o module Younga E i liczbie Poissona ν wstawiono bez luzu do nieodkształcalnego rowka i górną jego powierzchnię obciążono ciśnieniem p . Obliczyć obniżenie Δh tej powierzchni oraz zwiększenie δ odległości między swobodnymi ścianami kostki.

Rozwiązanie. Naprężenia i odkształcenia w kierunkach osi wynoszą

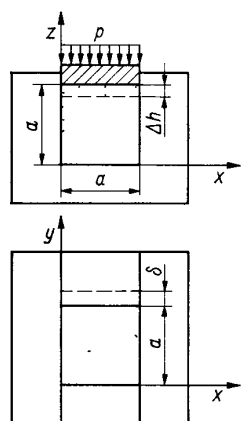
$$\varepsilon_x = 0, \quad \varepsilon_y = \frac{\delta}{a}, \quad \varepsilon_z = -\frac{h}{a}$$

$$\sigma_x = -q, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = -p$$

Po podstawieniu powyższych wartości do wzorów Hooke'a i rozwiązaniu układu równań otrzymujemy

$$q = \nu p, \quad \Delta h = \frac{pa}{E}(1 - \nu^2)$$

$$\delta = \frac{\nu pa}{E}(1 + \nu)$$



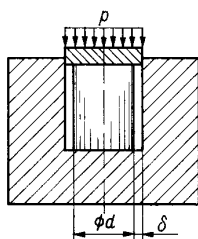
Rys. 3.13. Do zadania 3.13

Zadanie 3.14. Obliczyć względną zmianę objętości kostki omówionej w zadaniu 3.13.

ODPOWIEDŹ:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{E}(1+\nu)(1-2\nu)$$

Zadanie 3.15. Walec o średnicy d wstawiono w nieodkształcalny otwór z luzem δ , jak podano na rys. 3.14. Obliczyć, przy jakim ciśnieniu p luz zniknie.



Rys. 3.14. Do zadania 3.15

ODPOWIEDŹ:

$$p = \frac{E\delta}{\nu d}$$

Zadanie 3.16. Walec o średnicy d i wysokości h włożono w dopasowany otwór i za pomocą tłoka obciążono osiowo ciśnieniem p . Obliczyć naciski na walec oraz obniżenie tłoka.

ODPOWIEDZ.

$$q = \frac{\nu}{1-\nu}p, \quad \Delta h = \frac{ph}{E} \left(1 + \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right)$$

Zadanie 3.17. Obliczyć, przy jakiej wartości siły P zniknie mniejsza szczelina δ_2 między kostką a otworem (rys. 3.12).

ODPOWIEDŹ:

$$P = \frac{\delta_2 a E}{\nu}$$

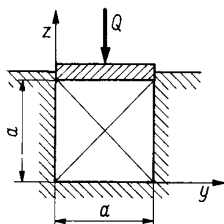
Zadanie 3.18. Sześcienną kostkę miedzianą o krawędzi $a = 4$ cm włożono do szczelnie dopasowanego nieodkształcalnego rowka i obciążono siłą $Q = 200$ kN. Obliczyć, jakie ciśnienie wywiera kostka na powierzchnie boczne rowka. Liczbę Poissona dla miedzi przyjąć $\nu = 0,33$.

Rozwiązanie. Z założenia kostka nie może się rozszerzyć w kierunku osi y ($\varepsilon_y = 0$), a swobodę wydłużeń ma jedynie w kierunku osi prostopadłej do płaszczyzny yz . Ciśnienie, jakie kostka wywiera na ściany rowka, jest równe naprężeniu σ_y , z jakim ściany cisną na kostkę, przeto

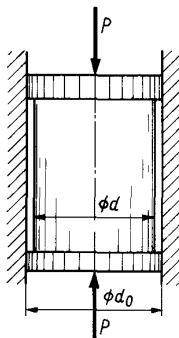
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = 0$$

$$\sigma_z = -\frac{Q}{a^2} = -\frac{200\,000}{1600} = -125 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \nu \sigma_z = -0,33 \cdot 125 = -41,3 \text{ MPa}$$



Rys. 3.15. Do zadania 3.18



Rys. 3.16. Do zadania 3.19

Zadanie 3.19. Walec miedziany ($\nu = 0,35$) o średnicy $d = 4$ cm włożono do otworu o średnicy wewnętrznej $d_0 = 4,001$ cm w nieodkształcalnym korpusie, a następnie poddano działaniu siły ściskającej $P = 300$ kN (rys. 3.16). Obliczyć ciśnienie p , jakie wywiera walec na ściany otworu, jeśli dla miedzi $E = 1 \cdot 10^5$ MPa.

ODPOWIEDŹ:

$$p = 91 \text{ MPa}$$

Ścinanie

4

Wprowadzenie

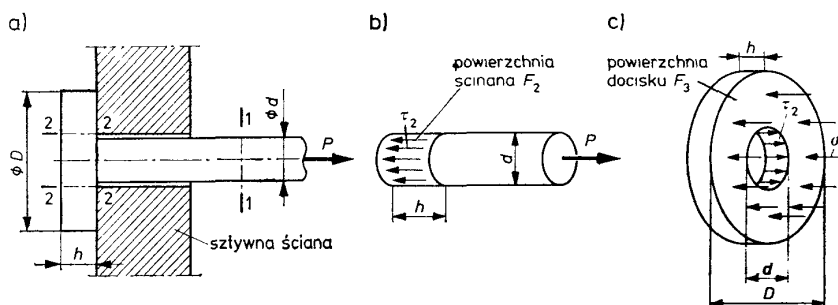
W przypadku pracy na ścinanie elementów współpracujących w połączeniach klinowych, śrubowych, nitowych, spawanych itp. przyjmuje się założenie upraszczające, a mianowicie, że rozkład naprężeń stycznych (tnących) jest równomierny na całej powierzchni ścinanej

$$\tau = \frac{T}{F} \leq k_t \quad (4.1)$$

gdzie: T – siła tnąca działająca w danym przekroju, k_t – naprężenie dopuszczalne na ścinanie ($k_t = 0,5 \div 0,7k_r$).

W rzeczywistości rozkład naprężeń stycznych nie jest równomierny. Bardziej ścisły rozkład naprężeń τ ujmuje wzór Żurawskiego (9.6).

Zadanie 4.1. Dobrać wymiary elementu przedstawionego na rys. 4.1a, jeżeli siła $P = 80$ kN, a naprężenia dopuszczalne wynoszą $k_r = 120$ MPa, $k_t = 80$ MPa i $k_d = 200$ MPa (naprężenie dopuszczalne na docisk).



Rys. 4.1. Do zadania 4.1

Rozwiązanie. Przekrój $l-l$ pręta pracuje na rozciąganie

$$\sigma_1 = \frac{P}{F_1} = \frac{4P}{\pi d^2} \leq k_r$$

więc

$$d \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi k_r}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 80\,000}{\pi \cdot 120}} = 29,1 \text{ mm}$$

Przyjmujemy średnicę $d = 30 \text{ mm}$. Jeżeli siła P będzie zbyt duża, to element ulegnie zniszczeniu polegającemu na tym, że pręt przedstawiony na rys. 4.1b przesunie się w prawo, a przekrój 2-2 zostanie ścięty. Ponieważ pole powierzchni ścinanej jest równe $F_2 = \pi dh$, więc naprężenia (styczne) wynoszą

$$\tau_2 = \frac{P}{F_2} = \frac{P}{\pi dh} \leq k_t$$

skąd

$$h \geq \frac{P}{dk_t} = \frac{80\,000}{\pi \cdot 30 \cdot 80} = 10,6 \text{ mm}$$

W miejscach docisku poszczególnych elementów konstrukcji nie mogą powstawać odkształcenia trwałe; naprężenia docisku nie mogą przekraczać wartości naprężeń dopuszczalnych na docisk (oznaczanych k_d).

Powierzchnia F_3 (rys. 4.1c) jest dociskana do ściany siłą P . Pole powierzchni wynosi

$$F_3 = \frac{1}{4}\pi(D^2 - d^2)$$

Naprężenia docisku

$$\sigma_3 = \frac{P}{F_3} = \frac{4P}{\pi(D^2 - d^2)} \leq k_d$$

stąd

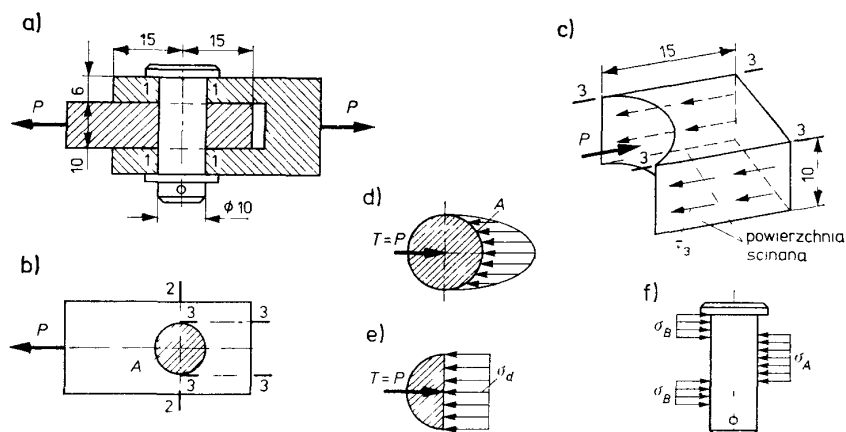
$$D \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi k_d} + d^2} = 37,5 \text{ mm}$$

Zadanie 4.2. Obliczyć minimalną wartość nacisku prasy, na której będą wykrawane elementy z blachy St3 o długości linii brzegowej $l = 20 \text{ cm}$ i o grubości $g = 12 \text{ mm}$.

Rozwiązanie. Blacha St3 ma wytrzymałość na rozciąganie $R_m = 376 \div 450 \text{ MPa}$. Wytrzymałość na ścinanie $R_t = 0,58R_m = 0,58 \cdot 450 = 260 \text{ MPa}$. Wymagana siła nacisku prasy wynosi

$$P = lgR_t = 200 \cdot 12 \cdot 260 = 620\,000 \text{ N} = 620 \text{ kN}$$

Zadanie 4.3. Obliczyć, jaką największą siłą P można obciążyć połączenie sworzniowe pokazane na rys. 4.2a. Naprężenia dopuszczalne dla sworznia i płaskowników wynoszą $k_r = 120 \text{ MPa}$, $k_t = 80 \text{ MPa}$, $k_d = 200 \text{ MPa}$.



Rys. 4.2. Do zadania 4.3

Rozwiązanie. Największą wartość siły P obliczymy z warunku, aby w żadnym przekroju połączenia naprężenia nie przekraczały wartości dopuszczalnych. Tak więc w przekrojach 1-1 sworznień pracuje na ścinanie. Ponieważ jednocześnie ścinane są dwa przekroje, więc pole ścinane jest równe

$$F_1 = 2 \cdot \frac{1}{4} \pi \cdot 10^2$$

Naprężenia styczne wynoszą

$$\tau_1 = \frac{4P}{2 \cdot \pi \cdot 10^2} \leq k_t$$

skąd dopuszczalna wartość siły P jest równa

$$P \leq \frac{2\pi \cdot 10^2 \cdot k_t}{4} = \frac{2\pi \cdot 100 \cdot 80}{4} = 12560 \text{ N}$$

Powierzchnia A sworznia (rys. 4.2b, c) jest dociskana do płaskownika siłą P . Rozkład nacisków jest nierównomierny, a jego charakter przedstawia rys. 4.2d. Dla uproszczenia przyjmuje się *równomierny rozkład nacisków na rzut powierzchni* A (czyli na średnicę sworznia, rys. 4.2e). Naprężenia dociskowe **muszą** spełniać warunek

$$\sigma_A = \frac{P}{10 \cdot 10} \leq k_d$$

stąd

$$P \leq 10 \cdot 10 \cdot 200 = 20\,000 \text{ N}$$

Naciski σ_A działające na środkową część sworznia (rys. 4.2f) są większe niż σ_B , ponieważ siła P jest przenoszona przez mniejszą powierzchnię; zatem nacisków σ_B można nie sprawdzać.

Naprężenia rozciągające w przekroju 2-2 płaskownika wynoszą

$$\sigma_2 = \frac{P}{(30 - 10) \cdot 10} \leq k_r$$

stąd

$$P \leq (30 - 10) \cdot 10 \cdot 120 = 24\,000 \text{ N}$$

Otwór na sworznię nie może być wykonany zbyt blisko końca płaskownika, gdyż nastąpi ścięcie płaskownika jednocześnie w dwóch przekrojach 3-3 i część płaskownika, przedstawiona na rys. 4.2c, wysunie się wraz ze sworzniem w prawo.

Naprężenia styczne w przekroju 3-3 wynoszą

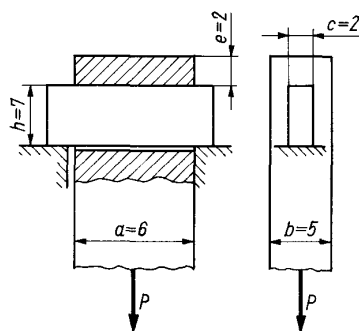
$$\tau_3 = \frac{P}{2 \cdot 15 \cdot 10} \leq k_t$$

a więc

$$P \leq 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 80 = 24\,000 \text{ N}$$

O wartości dopuszczalnej siły P , jaką może przenosić połączenie, decyduje najslabszy przekrój, a więc ścinanie sworznia. Największa (dopuszczalna) siła wynosi więc $P = 12\,560 \text{ N}$.

Zadanie 4.4. Jaką siłę P może bezpiecznie przenosić połączenie przedstawione na rys. 4.3, jeżeli $k_r = 120 \text{ MPa}$, zaś $k_t = 70 \text{ MPa}$. Wymiary połączenia są podane w centymetrach.



Rys. 4.3. Do zadania 4.4

ODPOWIEDŹ:

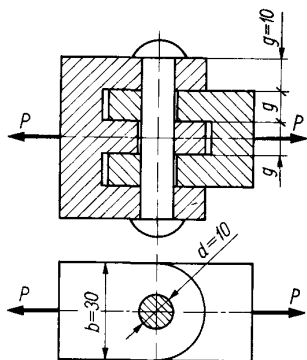
$$P_{max} = 168 \text{ kN}$$

Zadanie 4.5. Dobrać wymiary b , h i e dla układu podanego na rys. 4.3, by połączenie to mogło przenosić siłę $P = 300 \text{ kN}$, jeżeli $k_r = 150 \text{ MPa}$, $k_t = 100 \text{ MPa}$, wymiar $c = 2 \text{ cm}$, zaś $a = 5 \text{ cm}$.

ODPOWIEDŹ:

$$b = 6 \text{ cm}, \quad h = 7,5 \text{ cm}, \quad e = 3 \text{ cm}$$

Zadanie 4.6. Obliczyć dopuszczalną wartość siły P , jaką można obciążyć złącze podane na rys. 4.4. Naprężenia dopuszczalne wynoszą: $k_r = 120 \text{ MPa}$, $k_t = 90 \text{ MPa}$, $k_d = 190 \text{ MPa}$.

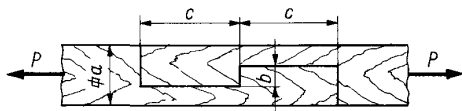


Rys. 4.4. Do zadania 4.6

ODPOWIEDŹ:

$$P \leq \pi d^2 \cdot k_t = 28\,300 \text{ N}$$

Zadanie 4.7. Obliczyć wymiary złącza dwóch belek drewnianych o przekroju kwadratowym (rys. 4.5) przeznaczonych do pracy pod obciążeniem $P = 40 \text{ kN}$, jeżeli $k_r = 10 \text{ MPa}$, $k_d = 8 \text{ MPa}$, zaś $k_t = 1 \text{ MPa}$.

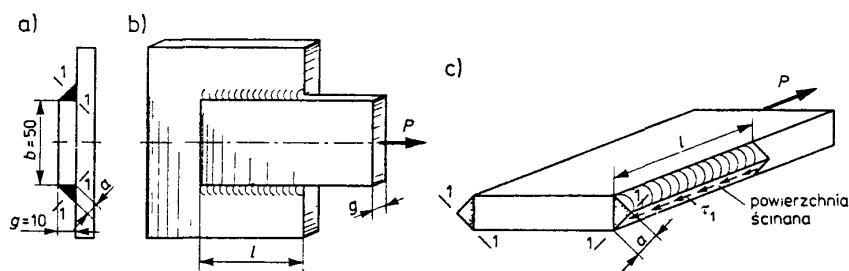


Rys. 4.5. Do zadania 4.7

ODPOWIEDŹ:

$$a = 11,4 \text{ cm}, \quad b = 4,4 \text{ cm}, \quad c = 35,1 \text{ cm}$$

Zadanie 4.8. Obliczyć największą wartość siły P , jaką można obciążyć płaskownik, oraz konieczną długość spoin (rys. 4.6), jeżeli naprężenia dopuszczalne wynoszą $k_r = 150 \text{ MPa}$ i $k_t = 90 \text{ MPa}$.



Rys. 4.6. Do zadania 4.8

Rozwiązanie. Spoiny powinny być tak zaprojektowane, aby mogły przetranszować największą siłę, jaką można obciążyć płaskownik. Siła ta wynika z warunku

$$P \leq b g k_r = 50 \cdot 10 \cdot 150 = 75000 \text{ N}$$

Jeżeli długość l spoin będzie za mała, to połączenie ulegnie zniszczeniu – płaskownik przesunie się na prawo, a obie spoiny ulegną jednoczesnemu ścięciu wzdłuż najmniejszej możliwej powierzchni ścinanej, oznaczonej $I-I$ na rys. 4.6a oraz c (dwie spoiny, każdy przekrój o długości l i szerokości a równej grubości spoiny: $a = g \cos 45^\circ = 0,7g$). Napężenie styczne w spoinie wynosi więc

$$\tau_1 = \frac{P}{F} = \frac{P}{2al} = \frac{P}{2 \cdot 0,7gl} \leq k_t$$

stąd konieczna długość spoin

$$l \geq \frac{P}{1,4glk_t} = \frac{75000}{1,4 \cdot 10 \cdot 90} = 59,5 \text{ mm}$$

Spoiny wykonuje się dłuższe o $2g$ ze względu na zmniejszenie grubości na końcach spoin i gorszą w tym obszarze jakość spawu; ostatecznie można przyjąć $l = 80 \text{ mm}$.

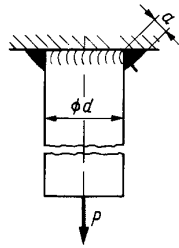
Zadanie 4.9. Pręt stalowy o średnicy $d = 60 \text{ mm}$ połączono spoiną z płytą (rys. 4.7). Wyznaczyć wymaganą grubość a spoiny, jeżeli dla pręta $k_r = 160 \text{ MPa}$, zaś dla spoiny $k_t = 120 \text{ MPa}$.

Rozwiązanie. W połączeniach tego typu przyjmuje się, że skoro pręt może przetranszować siłę rozciągającą

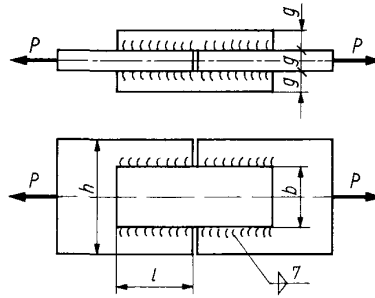
$$P = \frac{\pi d^2}{4} k_r = \frac{\pi 60^2}{4} \cdot 160 \left(\text{mm}^2 \cdot \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right) = 450000 \text{ N}$$

to również i spoina powinna bezpiecznie przetranszować taką właśnie siłę (układ o równej wytrzymałości), zatem

$$a \geq \frac{P}{\pi d k_t} = \frac{450000}{\pi \cdot 60 \cdot 120} = 20 \text{ mm}$$



Rys. 4.7. Do zadania 4.9



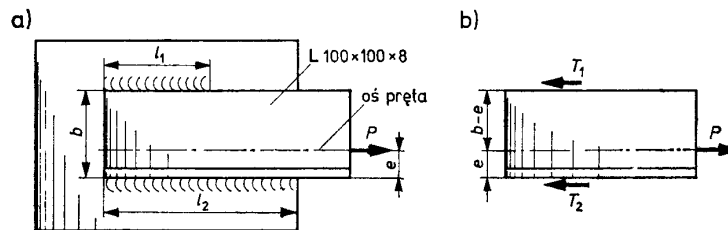
Rys. 4.8. Do zadania 4.10

Zadanie 4.10. Obliczyć wymagane wymiary b , h oraz l połączenia spawanego, przedstawionego na rys. 4.8. Dane: $P = 60 \text{ kN}$, $k_r = 120 \text{ MPa}$, $k_t = 70 \text{ MPa}$, grubość blach $g = 10 \text{ mm}$, wysokość spoin $a = 7 \text{ mm}$.

ODPOWIEDZ:

$$h \geq \frac{P}{gk_r} = 50 \text{ mm}, \quad b \geq \frac{P}{2gk_r} = 25 \text{ mm}, \quad l \geq \frac{P}{4hk_t} = 31 \text{ mm}$$

Zadanie 4.11. Obliczyć wymaganą długość l_1 i l_2 spoin, o grubości $a = 5 \text{ mm}$, łączących z płytą stalową kątownik obciążony siłą $P = 100 \text{ kN}$ (rys. 4.9a). Naprężenia dopuszczalne na ścinanie $k_t = 80 \text{ MPa}$.



Rys. 4.9. Do zadania 4.11

Rozwiązanie. W pewnej odległości od punktu przyłożenia siły P rozkład naprężeń w kątowniku jest, zgodnie z zasadą de Saint Venanta, równomierny, stąd naprężenie rozciągające jest stałe w całym przekroju pręta. Wypadkowa tych naprężeń równa sile P przechodzi więc przez środki ciężkości przekrojów poprzecznych kątownika. Aby obie spoiny były obciążone równomiernie i pracowały przy jednakowych naprężeniach stycznych $\tau = k_t$, siły T_1 i T_2 przenoszone przez spoiny muszą spełniać warunki równowagi (rys. 4.9b)

$$T_1 + T_2 = P \quad \text{oraz} \quad T_1(b - e) = T_2e$$

przy czym

$$T_1 = l_1 a k_t \quad \text{oraz} \quad T_2 = l_2 a k_t$$

Z powyższych warunków znajdujemy $l_1 = 70 \text{ mm}$, $l_2 = 181 \text{ mm}$.

Skrećanie wałów okrągłych. Sprężyny śrubowe

5

Wprowadzenie

Warunek wytrzymałościowy przy skrećaniu wałów o przekroju poprzecznym kołowym lub pierścieniowym ma postać

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{W_0} \leq k_s \quad (5.1)$$

zaś kąt skrećenia wału

$$\varphi = \frac{M_s l}{G J_0} \leq \varphi_{dop} \quad (5.2)$$

Oznaczenia w powyższych wzorach:

M_s – moment skrećający,

W_0 – wskaźnik wytrzymałości na skrećanie (tabl. 21.2),

J_0 – moment bezwładności biegunowy (przy skrećaniu, tabl. 21.2),

k_s – naprężenie dopuszczalne na skrećanie ($k_s \approx k_t = 0,5 \div 0,7 k_r$),

φ_{dop} – dopuszczalny kąt skrećenia (przyjmuje się np. $\varphi_{dop} = 0,005$ rad/m).

Naprężenia w sprężynach śrubowych, wykonanych z drutu o średnicy d , rozciąganych (lub ściskanych) siłą P określone są wzorem

$$\tau_{max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \leq k_s \quad (5.3)$$

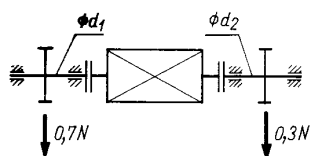
zaś wydłużenie sprężyny

$$\lambda = \frac{8PD^3 n}{G d^4} \quad (5.4)$$

gdzie: D – średnia średnica sprężyny, n – liczba czynnych zwojów sprężyny.

Zadanie 5.1. Silnik elektryczny o mocy $N = 80$ kW i obrotach $n = 750$ obr/min napędza dwie maszyny, z których jedna pobiera 70%, a druga 30% mocy silnika

(rys. 5.1). Obliczyć minimalne średnice wałów napędzających obie maszyny, jeżeli naprężenia dopuszczalne wynoszą $k_s = 80 \text{ MPa}$.



Rys. 5.1. Do zadania 5.1

Rozwiązanie. Moment skręcający w wale 1 wynosi

$$M_1 = 9550 \cdot \frac{0.7 \text{ kW}}{n \text{ obr/min}} = 9550 \cdot \frac{0.7 \cdot 80}{750} = 713 \text{ N} \cdot \text{m}$$

a w wale 2

$$M_2 = 9550 \cdot \frac{0.3 \cdot 80}{750} = 306 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Naprężenia w wale 1 wynoszą

$$\tau_1 = \frac{M_1}{W_0} = \frac{16M_1}{\pi d_1^3} \leq k_s$$

skąd

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_1}{\pi k_s}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 713 \cdot 10^3}{\pi \cdot 80}} = 35.8 \text{ mm}$$

analogicznie

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_2}{\pi k_s}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 306 \cdot 10^3}{\pi \cdot 80}} = 26.9 \text{ mm}$$

Zadanie 5.2. Dla wału przedstawionego na rys. 5.2a wykonać wykres momentów skręcających oraz obliczyć największe naprężenia i całkowity kąt skręcenia wału.

Rozwiązanie. Moment reakcji ściany wynika z równania statyki

$$2M + M - 4M + M_u = 0$$

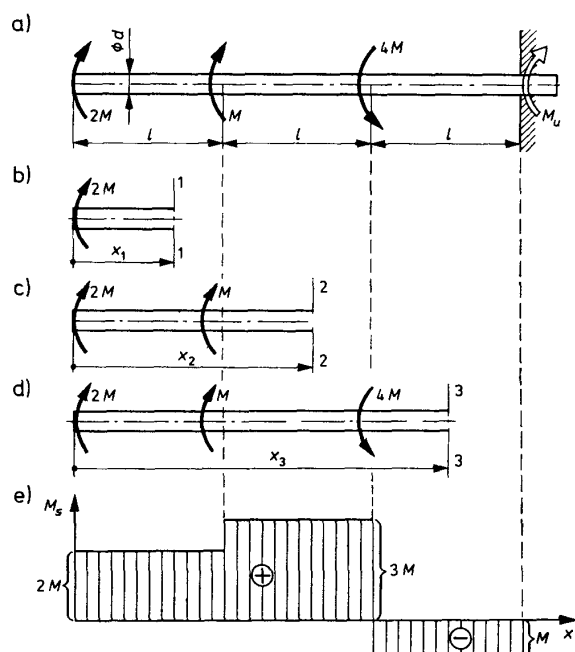
skąd $M_u = +M$.

Moment skręcający w przedziale 1 ($0 \leq x_1 \leq l$) wynosi

$$M_{s1} = 2M$$

w przedziale 2 ($l \leq x_2 \leq 2l$)

$$M_{s2} = 2M + M = 3M$$



Rys. 5.2. Do zadania 5.2

a w przedziale 3 ($2l \leq x_3 \leq 3l$)

$$M_{s3} = 2M + M - 4M = -M$$

Odcinki wału odpowiadające współrzędnym x_1, x_2, x_3 pokazano na rys. 5.2b, c, d, zaś wykres momentów skręcających – na rys. 5.2e. Największy moment skręcający wynosi $M_{s\max} = M_{s2} = 3M$, a największe naprężenie styczne

$$\tau_{\max} = \frac{M_{s2}}{W_0} = \frac{3M}{\pi d^3/16} = \frac{48M}{\pi d^3} \leq k_s$$

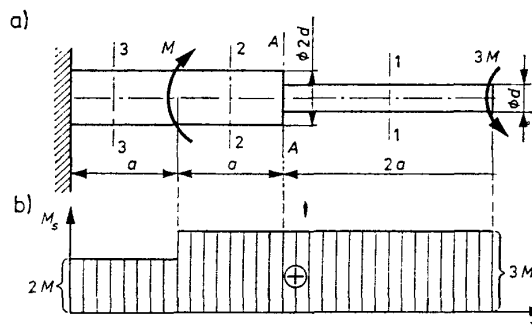
Całkowity kąt skręcenia jest sumą kątów skręcenia kolejnych odcinków wału

$$\varphi_c = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{2Ml}{GJ_0} + \frac{3Ml}{GJ_0} + \frac{-Ml}{GJ_0} = +\frac{4Ml}{GJ_0} = +\frac{4Ml}{G\pi d^4/32} = \frac{128Ml}{\pi Gd^4}$$

Znak dodatni świadczy o tym, że lewy koniec pręta obróci się w kierunku zgodnym z momentem $2M$.

Zadanie 5.3. Obliczyć największą wartość momentu M , jakim można obciążyć wał pokazany na rys. 5.3a. Średnica wału $d = 40$ mm, naprężenia dopuszczalne

na skręcanie $k_s = 70$ MPa, długość $a = 300$ mm, moduł odkształcenia postaciowego $G = 8,5 \cdot 10^4$ MPa. Obliczyć także całkowity kąt skręcenia wału oraz kąt, o jaki obróci się przekrój $A-A$.



Rys. 5.3. Do zadania 5.3

Rozwiązanie. Największe naprężenia wystąpią w prawej części wału

$$\tau_{max} = \tau_1 = \frac{3M}{\pi d^3/16} \leq k_s$$

stąd

$$M \leq \frac{\pi d^3 k_s}{48} = \frac{\pi \cdot 40^3 \cdot 70}{48} = 293 \text{ N} \cdot \text{m}$$

przyjmujemy $M_{max} = 290 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Całkowity kąt skręcenia wału wynosi

$$\begin{aligned} \varphi_c &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{3M \cdot 2a}{G\pi d^4/32} + \frac{3Ma}{G\pi(2d)^4/32} + \frac{2Ma}{G\pi(2d)^4/32} = + \frac{202Ma}{G\pi d^4} = \\ &= \frac{202 \cdot 290 \cdot 10^3 \cdot 300}{8,5 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 40^4} = +257 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 1,48^\circ = 89' \end{aligned}$$

Przekrój $A-A$ jest połączony ze ścianą odcinkami 2 i 3 wału; suma odkształceń tych odcinków jest równa kątowi obrotu przekroju $A-A$

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \varphi_3 + \varphi_2 = + \frac{10Ma}{G\pi d^4} = \frac{10 \cdot 290 \cdot 10^3 \cdot 300}{8,5 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 40^4} = +12,7 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = \\ &= 0,073^\circ = 4,4' \end{aligned}$$

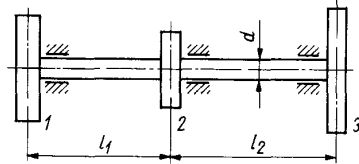
Znak dodatni świadczy o obrocie przekroju $A-A$ w kierunku działania momentu $3M$.

Zadanie 5.4. Na wale stalowym o stałej średnicy osadzono trzy koła, oznaczone jak na rys. 5.4. Poprzez koło 2 wał jest napędzany silnikiem o mocy

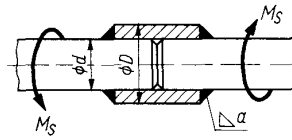
$N = 6$ kW. Koło 1 przekazuje moc $N_1 = 4$ kW, a koło 3 – resztę mocy. Wykonać wykres momentów skręcających, obliczyć średnicę wału oraz kąt skręcenia koła 1 względem koła 2. Dane: $l_1 = 2$ m, $k_s = 40$ MPa, $n = 120$ obr/min.

ODPOWIEDŹ:

$M_{s1} = 318$ N·m, $M_{s2} = 159$ N·m, $d = 35$ mm, $\varphi_{1,2} = 5.35 \cdot 10^{-2}$ rad ($\approx 3,07^\circ$)



Rys. 5.4. Do zadania 5.4



Rys. 5.5. Do zadania 5.5

Zadanie 5.5. Obliczyć średnicę d wału oraz średnicę D tulei i wysokość a spoiny połączenia (rys. 5.5) przenoszącego moment skręcający $M_s = 9000$ N·m, jeżeli dla wszystkich tych elementów naprężenia dopuszczalne na ścinanie i skręcanie wynoszą $k_s = 60$ MPa.

Rozwiązanie. Średnicę wału obliczamy ze wzoru

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_s}{\pi k_s}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 9000 \cdot 1000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{\pi \cdot 60 \text{ N/mm}^2}} = 91,5 \text{ mm} \approx 92 \text{ mm}$$

średnicę zewnętrzną D tulei znajdujemy ze wzoru

$$W_0 = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} \leq \frac{M_s}{k_s} = \frac{9000 \cdot 1000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{60 \text{ N/mm}^2} = 150000 \text{ mm}^3 = 150 \text{ cm}^3$$

stąd dla $d = 9,2$ cm otrzymujemy równanie

$$D^4 - 764D - 7164 = 0$$

Metodą prób znajdujemy $D = 11,2$ cm.

Grubość spoiny znajdujemy z warunku

$$\pi d a k_s \frac{d}{2} \geq M_s$$

stąd

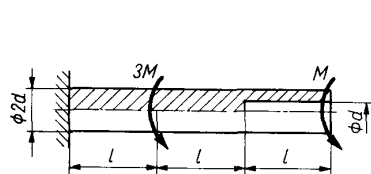
$$a \geq \frac{2M_s}{\pi d^2 k_s} = \frac{2 \cdot 9000 \cdot 1000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{\pi \cdot 92^2 \cdot 60 \text{ mm}^2 \cdot \text{N/mm}^2} = 11,3 \text{ mm}$$

Aby można było wykonać spoiny o grubości $a = 11,3$ mm, średnica D tulei musi być równa $d + 2a\sqrt{2} = 92 + 2 \cdot 11,3\sqrt{2} = 124$ mm.

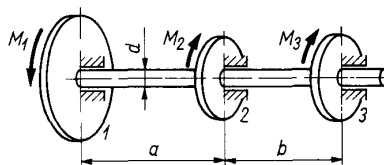
Zadanie 5.6. Obliczyć największą wartość momentu M , jakim można obciążyć wał przedstawiony na rys. 5.6, oraz całkowity kąt skrócenia wału. Dane: d , l , G , k_s .

ODPOWIEDŹ:

$$M = \frac{1}{8} \pi d^3 k_s, \quad \varphi_c = \frac{182 M l}{15 G d^4}$$



Rys. 5.6. Do zadania 5.6



Rys. 5.7. Do zadania 5.7

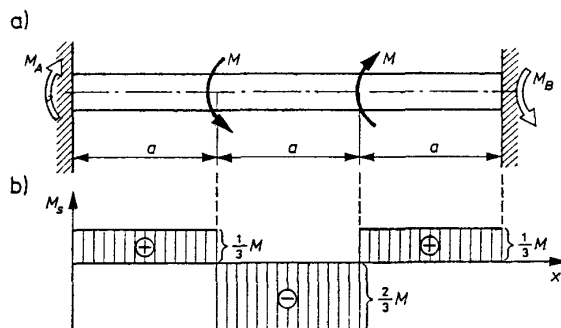
Zadanie 5.7. Na wał stalowy o stałej średnicy zostały osadzone trzy koła, z których jedno (oznaczone na rys. 5.7 numerem 1) jest napędzane momentem $M_1 = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$, zaś pozostałe przenoszą go (np. za pomocą pasów) na obrabiarki. Koło 2 przenosi moment $M_2 = 80 \text{ N} \cdot \text{m}$, zaś koło 3 moment $M_3 = M_1 - M_2 = 120 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Obliczyć średnicę wału oraz kąt skrócenia jednego końca wału względem drugiego, jeżeli: $a = 3 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, moduł sprężystości postaciowej $G = 8,5 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, a $k_s = 30 \text{ MPa}$.

ODPOWIEDZ:

$$d = 70 \text{ mm}, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 0,0120 + 0,0299 = 0,0419 \text{ rad} = 2,40^\circ$$

Zadanie 5.8. Obliczyć wartość największych naprężeń skręcających występujących w wał przedstawionym na rys. 5.8a.



Rys. 5.8. Do zadania 5.8

Rozwiązanie. Utwierdzenia końców wału zastępujemy momentami M_A i M_B . Z warunków równowagi mamy tylko jedno równanie

$$M_A - M + M - M_B = 0$$

skąd $M_A = M_B$. Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. Brakujące równanie wyznaczymy z warunku odkształceń. Ponieważ oba końce wału są utwierdzone, ich względny kąt obrotu jest równy zero. Całkowity kąt skręcenia wału jest równy zero, zatem

$$\varphi_c = \frac{M_A a}{GJ_0} + \frac{(M_A - M)a}{GJ_0} + \frac{(M_A - M + M)a}{GJ_0} = 0$$

$$\text{skąd } M_A = \frac{1}{3}M.$$

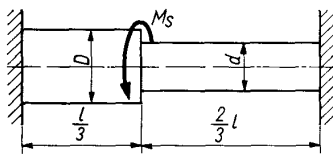
Wykres momentów skręcających przedstawiono na rys. 5.8b. Największy moment skręcający $M_{max} = \frac{2}{3}M$, a maksymalne naprężenia wynoszą

$$\tau_{max} = \frac{M_{max}}{W_0} = \frac{\frac{2}{3}M}{\frac{1}{16}\pi d^3} = \frac{32M}{3\pi d^3} \leq k_s$$

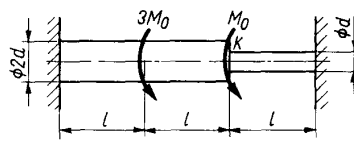
Zadanie 5.9. Okrągły pręt o zmiennej średnicy $D = 6$ cm i $d = 4$ cm jest utwierdzony na końcach i poddany działaniu momentu skręcającego M_s w sposób podany na rys. 5.9. Obliczyć dopuszczalną wartość momentu M_s , jeżeli $k_s = 60$ MPa.

ODPOWIEDŹ:

$$M_s = 1396 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Rys. 5.9. Do zadania 5.9



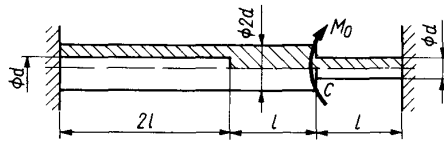
Rys. 5.10. Do zadania 5.10

Zadanie 5.10. Pręt o zmiennej średnicy d oraz $2d$ jest utwierdzony na obu końcach i skręcany momentami M_0 oraz $3M_0$, jak podano na rys. 5.10. Wykonać wykres momentów skręcających, wykres naprężeń maksymalnych τ_{max} oraz obliczyć kąt φ_K skręcenia przekroju K . Dane liczbowe: $l = 1$ m, $d = 5$ cm, $M_0 = 1000$ N·m.

ODPOWIEDŹ. Moment utwierdzenia w lewej ścianie jest równy

$$M = \frac{67}{18}M_0$$

Zadanie 5.11. Wydrążony wał o zmiennym przekroju jest utwierdzony na obu końcach i obciążony momentem skręcającym M_0 , jak na rys. 5.11. Wyznaczyć maksymalne naprężenia styczne, jakie występują w wale, oraz kąt obrotu φ_C obciążonego przekroju. Dane: $l = 60$ cm, $d = 4$ cm, $G = 8,5 \cdot 10^4$ MPa, $M_0 = 800$ N·m.

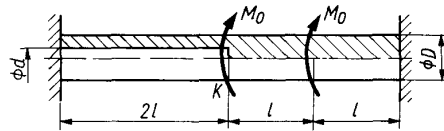


Rys. 5.11. Do zadania 5.11

ODPOWIEDŹ. Moment utwierdzenia w lewej ścianie jest równy

$$M = \frac{240}{287} M_0$$

Zadanie 5.12. Wydrążony wał jest utwierdzony na obu ścianach i obciążony momentem skręcającym M_0 , jak podano na rys. 5.12. Obliczyć średnicę oraz kąt obrotu przekroju K wału, mając dane: $M_0 = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $k_s = 70 \text{ MPa}$, $l = 80 \text{ cm}$, $\frac{d}{D} = \frac{2}{3}$.



Rys. 5.12. Do zadania 5.12

ODPOWIEDZ. Moment utwierdzenia w lewej ścianie wynosi

$$M = \frac{195}{292} M_0$$

Zadanie 5.13. Zaprojektować stalową sprężynę śrubową, która pod działaniem siły $P = 500 \text{ N}$ wydłuży się o $\lambda = 6 \text{ cm}$. Naprężenie dopuszczalne na skręcanie dla stali sprężynowej $k_s = 400 \text{ MPa}$, $G = 8,5 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, a stosunek średnic $D/d = 10$.

Rozwiązanie. Ze wzoru

$$\tau_{max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \leq k_s$$

znajdujemy

$$D = \frac{k_s \pi d^3}{8P} = \frac{400 \cdot \pi d^3}{8 \cdot 500} = 0,314 d^3$$

Ponieważ $D = 10d$, więc $d = 5,67 \text{ mm} \approx 5,7 \text{ mm}$, a $D = 57 \text{ mm}$.

Liczbę zwojów obliczymy ze wzoru

$$\lambda = \frac{8PD^3 n}{Gd^4}$$

stąd

$$n = \frac{\lambda G d^4}{8 P D^3} = \frac{60 \cdot 8,5 \cdot 10^4 \cdot 5,7^4}{8 \cdot 500 \cdot 57^3} = 7,3$$

Związek między wydłużeniem λ a obciążeniem P sprężyny śrubowej podaje się zazwyczaj poprzez stałą c sprężyny $P = \lambda c$, gdzie c stała sprężyny

$$c = \frac{G d^4}{8 D^3 n} \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

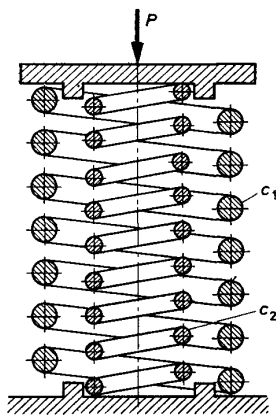
Zadanie 5.14. Wewnątrz sprężyny o stałej c_1 wstawiono współosiowo sprężynę o stałej c_2 . Długości sprężyn są jednakowe. Obliczyć zastępczą stałą układu, jeśli działa na niego siła P .

Rozwiązanie. Wydłużenie (skrócenie) obu sprężyn jest jednakowe, równe λ . Siła P jest sumą sił $P_1 = \lambda c_1$ oraz $P_2 = \lambda c_2$, zatem

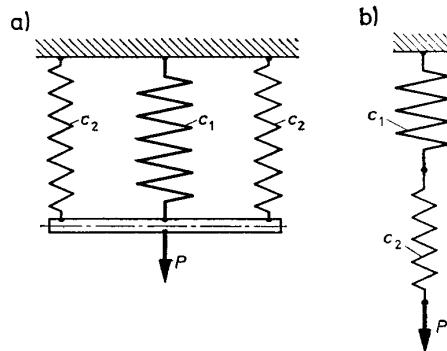
$$P = P_1 + P_2 = \lambda (c_1 + c_2)$$

stąd

$$c = c_1 + c_2$$



Rys. 5.13. Do zadania 5.14



Rys. 5.14. Do zadania 5.15

Zadanie 5.15. Obliczyć zastępczą stałą (sztywność) układu sprężyn przedstawionego na rys. 5.14 a i b.

ODPOWIEDŹ:

$$\text{a) } c = c_1 + 2c_2, \quad \text{b) } c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$$

Skrećanie prętów cienkościennych

6

Wprowadzenie

Napężenia w cienkościennych prętach skręcanych oblicza się ze wzorów
a) dla przekrojów zamkniętych (wzory Bredta)

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{2\delta_{min}F_{sr}} \leq k_s \quad (6.1)$$

gdzie: δ_{min} – najmniejsza grubość pręta, F_{sr} – pole powierzchni przekroju poprzecznego ograniczone linią średnią konturu.

Kąt skrećenia takiego pręta (jednostkowy) wynosi

$$\theta = \frac{M_s}{4GF_{sr}^2} \int_s \frac{ds}{\delta} \leq \theta_{dop} \quad (6.2)$$

Występująca w tym wzorze całka musi być obliczona po zamkniętej linii średniej konturu pręta.

b) dla przekroju w kształcie prostokąta o bokach $a > \delta$

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{W_s} = \frac{M_s}{C_1 a \delta^2} \leq k_s \quad (6.3)$$

$$\theta = \frac{M_s}{GJ_s} = \frac{M_s}{GC_2 a \delta^3} \leq \theta_{dop} \quad (6.4)$$

przy czym wartości współczynników C_1 i C_2 są podane w tabl. 6.1.

Tablica 6.1

a/δ	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
C_1	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
C_2	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281				

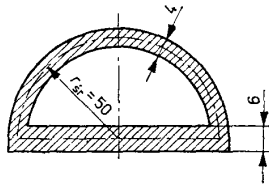
Z tablicy 6.1 wynika, że dla $a > 10\delta$ można przyjmować $C_1 = C_2 = \frac{1}{3}$.

c) dla przekrojów otwartych, utworzonych z połączonych ze sobą prostokątów o bokach $a \geq 10\delta$

$$\tau_{max} = \frac{3M_s \delta_{max}}{\sum a_i \delta_i^3} \leq k_s \quad (6.5)$$

$$\theta = \frac{3M_s}{G \sum a_i \delta_i^3} \leq \theta_{dop} \quad (6.6)$$

Zadanie 6.1. Obliczyć naprężenia oraz kąt skręcenia w rurze stalowej o długości $l = 4$ m i przekroju poprzecznym pokazanym na rys. 6.1 skróconej momentem $M_s = 1600 \text{ N} \cdot \text{m}$.



Rys. 6.1. Do zadania 6.1

Rozwiązanie. Rurę traktujemy jako pręt cienkościenny o przekroju zamkniętym i obliczamy według wzorów Bredta. Pole obwiedzione linią średnią konturu wynosi

$$F_{sr} = \frac{1}{2} \pi r_{sr}^2 = \frac{1}{2} \pi \cdot 50^2 = 3900 \text{ mm}^2$$

Z wzoru (6.1) obliczamy

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{2\delta_{min} F_{sr}} = \frac{1600 \cdot 10^3}{2 \cdot 4 \cdot 3900} = 51,4 \text{ MPa}$$

Całka po obwodzie zamkniętym występująca we wzorze (6.2) wynosi w danym przypadku

$$\int_s \frac{ds}{\delta} = \frac{\pi r_{sr}}{4} + \frac{2r_{sr}}{6} = \frac{\pi \cdot 50}{4} + \frac{2 \cdot 50}{6} = 55,9$$

Kąt skręcenia φ rury, dla $G = 8,1 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ (z tabl. 21.1), wynosi

$$\varphi = l\theta = l \frac{M_s}{4GF_{sr}^2} \int_s \frac{ds}{\delta} = 4000 \frac{1600 \cdot 10^3}{4 \cdot 8,1 \cdot 10^4 \cdot 3900^2} \cdot 55,9 = 0,073 \text{ rad} \approx 4,2^\circ$$

Zadanie 6.2. Jakim maksymalnym momentem skręcającym można obciążyć rurę stalową o średnicy wewnętrznej $d = 56$ mm, zewnętrznej $D = 60$ mm i długości $l = 2$ m, jeżeli naprężenia dopuszczalne na skręcanie wynoszą $k_s = 60$ MPa. Obliczyć także całkowity kąt skręcenia rury. Do obliczeń zastosować wzory Bredta. Sprawdzić otrzymane wyniki, traktując rurę jako wał wydrążony.

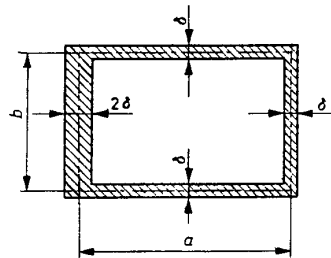
ODPOWIEDZ. Ze wzorów Bredta otrzymamy

$$M_s \leq 2k_s \delta F_{sr} = 2 \cdot 60 \cdot 2 \cdot 2642 = 634 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\varphi = \frac{M_s l}{4GF_{sr}^2} \int \frac{ds}{\delta} = \frac{M_s l}{4GF_{sr}^2} \frac{\pi d_{sr}}{\delta} = \frac{634 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3}{4 \cdot 8,5 \cdot 10^4 \cdot 2642^2} \frac{\pi \cdot 58}{2} = 0,049 \text{ rad}$$

Według wzorów dla wałów wydrążonych $M_s \leq 614 \text{ N} \cdot \text{m}$, $\varphi = 0,047 \text{ rad}$.

Zadanie 6.3. Obliczyć dopuszczalny moment skręcający oraz jednostkowy kąt skręcenia dla przekroju przedstawionego na rys. 6.2. Dane liczbowe: $\delta = 2$ mm, $a = 60$ mm, $b = 40$ mm, $G = 8,1 \cdot 10^4$ MPa, $k_s = 70$ MPa.



Rys. 6.2. Do zadania 6.3

ODPOWIEDŹ:

$$M \leq 2\delta abk_s = 673 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad \theta = \frac{M(4a + 3b)}{8\delta Ga^2b^2} = 0,321 \cdot 10^{-4} \text{ rad/mm}$$

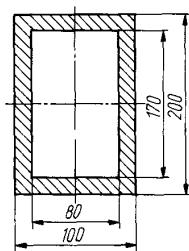
Zadanie 6.4. Jaki moment skręcający może przenosić rura o wymiarach przekroju poprzecznego podanych na rys. 6.3, jeżeli naprężenie dopuszczalne na skręcanie $k_s = 80$ MPa.

ODPOWIEDŹ:

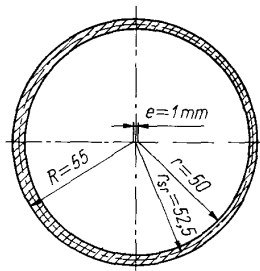
$$M_s = 26700 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Zadanie 6.5. Rura o średnicy zewnętrznej $D = 2R = 11$ cm i wewnętrznej $d = 2r = 10$ cm przeznaczona do pracy na skręcanie, została wykonana w ten sposób, że powstał mimośród $e = 1$ mm (rys. 6.4). Obliczyć procentowe osłabienie rury w porównaniu z rurą wykonaną prawidłowo.

Rozwiązanie. Ze względu na mimośrodowe wykonanie otworu należy obliczać rurę według wzoru (6.1).



Rys. 6.3. Do zadania 6.4



Rys. 6.4. Do zadania 6.5

Najmniejsza grubość rury jest równa

$$\delta_{min} = \frac{D-d}{2} - e = \frac{11-10}{2} - 0,1 = 0,4 \text{ cm}$$

Średni kontur będzie z bardzo dużym przybliżeniem okręgiem o promieniu równym średniej arytmetycznej promienia zewnętrznego i wewnętrznego

$$r_{sr} = \frac{D+d}{4} = \frac{11+10}{4} = 5,25 \text{ cm}$$

zakreślonym ze środka mimośrodowo e , zatem

$$F_{sr} = \pi r_{sr}^2 = \pi \cdot 5,25^2 = 86,6 \text{ cm}^2$$

Po podstawieniu powyższych wartości do wzoru (6.1) otrzymamy

$$M_s = 2\delta_{min}F_{sr}k_s = 2 \cdot 0,4 \cdot 86,6k_s = 69,2k_s$$

Wzór ten określa dopuszczalny moment skręcający przy założeniu, że średnie naprężenie tnące na grubości ścianki w tym miejscu, gdzie ta ścianka jest najcieńsza – osiąga wartość k_s .

Gdyby rurę wykonano prawidłowo, wówczas przy założeniu, że średnie (nie maksymalne!) naprężenie styczne jest również równe k_s , mogłaby ona przenosić moment skręcający

$$M_s = W_0k_s = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D_{sr}}k_s = \frac{\pi[(D_{sr} + \delta)^4 - (D_{sr} - \delta)^4]}{16D_{sr}}k_s \approx \frac{\pi D_{sr}^2 \delta}{2}k_s = 86,6k_s$$

gdzie

$$D_{sr} = \frac{D+d}{2}, \quad \delta = \frac{D-d}{2}$$

Procentowe osłabienie rury wynosi

$$\frac{86,6 - 69,2}{86,6} \cdot 100\% = 20,0\%$$

Zadanie 6.6. Zadanie poprzednie (zadanie 6.5) przeliczyć dla następujących danych: $R = 70$ mm, $r = 65$ mm, $e = 3$ mm.

ODPOWIEDZ. Osłabienie rury wynosi 60%.

Zadanie 6.7. Obliczyć, jaki moment skręcający M_s może przenosić pręt aluminiowy o przekroju w kształcie prostokąta o bokach $a = 16$ mm, $\delta = 4$ mm, jeżeli napężenie dopuszczalne na skręcanie $k_s = 60$ MPa. Obliczyć również kąt skręcenia pręta, jeżeli jego długość $l = 2$ m, a moduł sprężystości postaciowej aluminium $G = 8,1 \cdot 10^4$ MPa.

Rozwiązanie. W celu rozwiązania tego zagadnienia wykorzystamy wzory Bredta do obliczania tego rodzaju przekroju. Dla stosunku długości boków $a/\delta = 16/4 = 4$ z tabl. 6.1 odczytujemy $C_1 = 0,282$ oraz $C_2 = 0,281$; ze wzorów (6.3) i (6.4) obliczamy

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{W_s} = \frac{M_s}{C_1 a \delta^2} \leq k_s$$

stąd

$$M_s = C_1 a \delta^2 k_s = 0,282 \cdot 16 \cdot 4^2 \cdot 60 = 4240 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$\varphi = \theta l = \frac{M_s l}{G J_s} = \frac{M_s l}{G C_2 a \delta^3} = \frac{4240 \cdot 2000}{8,1 \cdot 10^4 \cdot 0,281 \cdot 16 \cdot 4^3} = 0,357 \text{ rad} = 21,3^\circ$$

Zadanie 6.8. Obliczyć największy moment skręcający M_s , jakim można obciążać rurę o wymiarach jak w zadaniu 6.2, jeżeli zostanie ona rozcięta wzdłuż tworzącej. Obliczyć także całkowity kąt skręcenia, jeśli $k_s = 60$ MPa.

Rozwiązanie. Zgodnie z wzorami Bredta dla skręcanych prętów cienkościennych o przekrojach otwartych przekrój poprzeczny rozciętej rury traktujemy jako prostokąt o szerokości $\delta = 2$ mm i długości

$$a = 2\pi r_{sr} = 2 \cdot \pi \cdot 29 = 182 \text{ mm}$$

gdzie

$$r_{sr} = \frac{1}{4}(D + d) = \frac{1}{4}(60 + 56) = 29 \text{ mm}$$

Dopuszczalny moment skręcający M_s wynika ze wzoru (6.3)

$$M_s = \frac{1}{3} a \delta^2 k_s = \frac{1}{3} \cdot 182 \cdot 2^2 \cdot 60 = 14\,600 \text{ N} \cdot \text{mm} = 14,6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Całkowity kąt skręcenia rury (wzór 6.4) wynosi

$$\varphi = \theta l = \frac{3M_s l}{a\delta^3 G} = \frac{3 \cdot 14600 \cdot 2000}{182 \cdot 2^3 \cdot 8,5 \cdot 10^4} = 0,695 \text{ rad} = 40^\circ$$

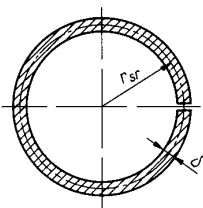
Zadanie 6.9. Rura o średnicy zewnętrznej $D = 120 \text{ mm}$ i grubości $\delta = 4 \text{ mm}$ została rozcięta wzdłuż tworzącej (rys. 6.5). Obliczyć dopuszczalny moment skręcający, jaki może przenieść rura, jeżeli $k_s = 40 \text{ MPa}$.

Rozwiązanie. Grubość ścianki jest stała i równa $\delta = 4 \text{ mm}$, zaś promień średniego konturu wynosi $r_{sr} = 58 \text{ mm}$. Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie oblicza się ze wzoru

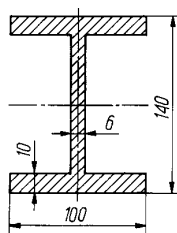
$$W_s = \frac{1}{3} \cdot 2\pi r_{sr} \delta^2 = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 58 \cdot 4^2 = 1940 \text{ mm}^3$$

$$M_s = \tau_{max} W_s = k_s W_s = 40 \cdot 1940 = 75600 \text{ N} \cdot \text{mm} = 75,6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Porównując otrzymany wynik z wartością momentu skręcającego, jaki może przenieść taka sama rura nie rozcięta ($M_s = 3380 \text{ N} \cdot \text{m}$), widzimy, że rura nie rozcięta może przenosić około 45 razy większy moment skręcający niż rura rozcięta, przy takich samych naprężeniach dopuszczalnych.



Rys. 6.5. Do zadania 6.9



Rys. 6.6. Do zadania 6.10

Zadanie 6.10. Obliczyć dopuszczalną wartość momentu skręcającego M_s dla stalowego teownika, pokazanego na rys. 6.6, jeżeli $k_s = 50 \text{ MPa}$.

Rozwiązanie. Przekrój poprzeczny pręta dzielimy na dwie półki i środek. Jednostkowy kąt skręcenia jest równy

$$\theta = \frac{k_s}{\delta_{max} G} = \frac{50}{10 \cdot 8,1 \cdot 10^4} = 6,16 \cdot 10^{-5} \text{ rad/mm}$$

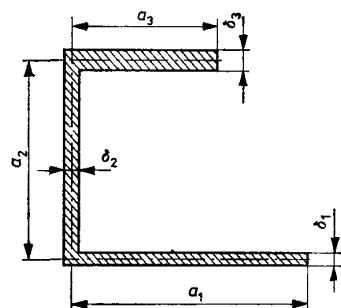
Sztywność skręcania

$$C = \frac{1}{3} G \sum a_i \delta_i^3 = \frac{1}{3} \cdot 8,1 \cdot 10^4 (120 \cdot 6^3 + 2 \cdot 100 \cdot 10^3) = 61 \cdot 10^8 \text{ N/mm}^2$$

Dopuszczalny moment skręcający wynosi

$$M_s = \theta C = 6,16 \cdot 10^{-5} \cdot 61 \cdot 10^8 = 375 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm} = 375 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Zadanie 6.11. Obliczyć największy moment skręcający, jakim można obciążyć pręt o przekroju przedstawionym na rys. 6.7. Wymiary pręta: $a_1 = 40$ mm, $\delta_1 = 2$ mm, $a_2 = 50$ mm, $\delta_2 = 3$ mm, $a_3 = 45$ mm, $\delta_3 = 5$ mm; naprężenie dopuszczalne na skręcanie $k_s = 80$ MPa.



Rys. 6.7. Do zadania 6.11

Rozwiązanie. Naprężenie styczne jest równe

$$\tau_{max} = \frac{M}{\frac{1}{3} G \sum a_i \delta_i^3} G \delta_{max} \leq k_s$$

a więc

$$M \leq \frac{k_s (a_1 \delta_1^3 + a_2 \delta_2^3 + a_3 \delta_3^3)}{3 \delta_3} = \frac{80 (40 \cdot 2^3 + 50 \cdot 3^3 + 45 \cdot 5^3)}{3 \cdot 5} = 38,9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Zadanie 6.12. Pręt pryzmatyczny o przekroju poprzecznym (rys. 6.7) jest skręcany momentem $M_0 = 30$ N·m. Obliczyć maksymalne naprężenia oraz jednostkowy kąt skręcenia. Dane: $a_1 = 100$ mm, $a_2 = 80$ mm, $a_3 = 60$ mm, $\delta_1 = 3$ mm, $\delta_2 = 4$ mm, $\delta_3 = 5$ mm, $G = 2,7 \cdot 10^4$ MPa.

ODPOWIEDŹ:

$$\tau_{max} = \frac{M_0 \delta_{max}}{\frac{1}{3} \sum a_i \delta_i^3} = 29,3 \text{ MPa}, \quad \theta = \frac{M}{\frac{1}{3} G \sum a_i \delta_i^3} = 2,18 \cdot 10^{-4} \text{ rad/mm}$$

Momenty bezwładności figur płaskich

7

Wprowadzenie

Obliczanie momentów bezwładności – jako czynność wybitnie algebraiczną – ograniczono wyłącznie do przekrojów posiadających osie symetrii lub złożonych z elementów posiadających takie osie.

Wartości momentów bezwładności J względem osi głównych centralnych dla częściej spotykanych figur podano w tabl. 21.2. W obliczeniach stosowano:

– wzór Steinera dla momentów bezwładności względem dowolnej osi z , równoległej do osi centralnej z_c , gdy odległość między tymi osiami wynosi a

$$J_z = J_{z_c} + Fa^2 \quad (7.1)$$

– wzór Steinera dla momentów odśrodkowych (dewiacyjnych)

$$J_{yz} = J_{y_c z_c} + Fab \quad (7.2)$$

W powyższych wzorach litera F oznacza pole figury.

Wartość kąta α_0 , tzn. kąta, o jaki należy obrócić osie układu, by stały się one osiami głównymi (by momenty bezwładności względem tych osi obroconych osiągnęły wartości ekstremalne), wyznacza się ze wzoru

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{yz}}{J_y - J_z} \quad (7.3)$$

Wzory na obliczanie wartości liczbowych momentów bezwładności podstawowych figur płaskich zamieszczono w tabl. 21.2.

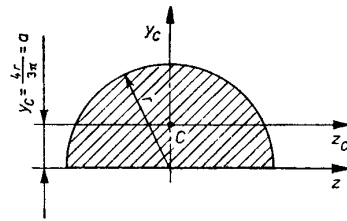
Zadanie 7.1. Wyprowadzić wzór na moment bezwładności półkola względem osi centralnej (rys. 7.1).

Rozwiązanie. Moment bezwładności półkola względem osi z jest równy połowie momentu bezwładności całego koła

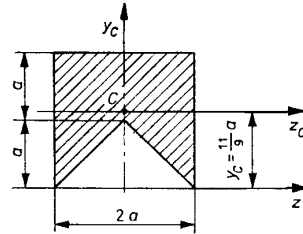
$$J_z = \frac{1}{2} \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{8}$$

Stosując wzór Steinera, mamy

$$J_{z_c} = J_z - Fa^2 = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{\pi r^2}{2} \left(\frac{4r}{3\pi} \right)^2 \approx 0,11r^4$$



Rys. 7.1. Do zadania 7.1



Rys. 7.2. Do zadania 7.2

Zadanie 7.2. Obliczyć moment bezwładności przekroju, pokazanego na rys. 7.2, względem osi centralnej z_c .

Rozwiązanie. Moment bezwładności względem osi z wynosi (tabl. 21.2)

$$J_z = \frac{2a(2a)^3}{3} - \frac{2aa^3}{12} = \frac{31}{6}a^4$$

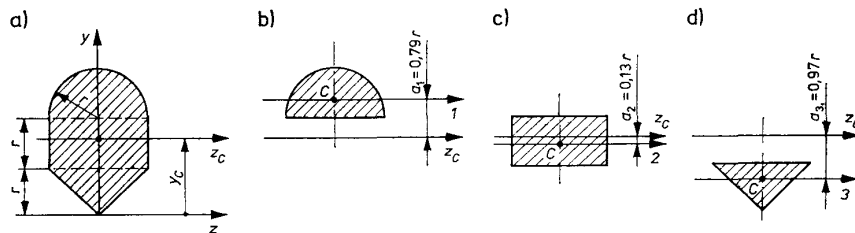
zaś współrzędna środka ciężkości

$$y_c = \frac{4a^2a - a^2 \cdot \frac{1}{3}a}{2a \cdot 2a - \frac{1}{2}2aa} = \frac{11}{9}a$$

Z wzoru Steinera otrzymamy

$$J_{z_c} = J_z - Fy_c^2 = \frac{31}{6}a^4 - 3a^2 \left(\frac{11}{9}a \right)^2 = \frac{37}{54}a^4$$

Zadanie 7.3. Obliczyć moment bezwładności przekroju, pokazanego na rys. 7.3, względem osi centralnej z_c .



Rys. 7.3. Do zadania 7.3

Rozwiązanie. Położenie środka ciężkości przekroju jest określone współrzędną

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2(2r + \frac{4}{3}r/\pi) + 2r^2 \cdot \frac{3}{2}r + r^2 \cdot \frac{2}{3}r}{\frac{1}{2}\pi r^2 + 2rr + \frac{1}{2}2rr} = 1,63r$$

Moment bezwładności przekroju jest równy sumie momentów bezwładności względem osi z_c trzech figur składowych.

Dla półkola $J_1 = 0,11r^4$, a względem osi z_c (jeśli się zastosuje wzór Steinera)

$$J_{1z_c} = J_1 + F_1 a_1^2 = 0,11r^4 + \frac{1}{2}\pi r^2 (0,79r)^2 = 1,09r^4$$

Dla prostokąta $J_2 = 2rr^3/12$ i względem osi z_c

$$J_{2z_c} = J_2 + F_2 a_2^2 = \frac{1}{6}r^4 + 2r^2 (0,13r)^2 = 0,20r^4$$

a dla trójkąta $J_3 = 2rr^3/36 = r^4/18$, zatem

$$J_{3z_c} = J_3 + F_3 a_3^2 = \frac{1}{18}r^4 + r^2 (0,97r)^2 = 1,00r^4$$

Ostatecznie otrzymamy

$$J_{z_c} = J_{1z_c} + J_{2z_c} + J_{3z_c} = 1,09r^4 + 0,20r^4 + 1,00r^4 = 2,29r^4$$

Zadanie 7.4. Obliczyć odśrodkowy moment bezwładności ćwiartki koła względem układu osi yz (rys. 7.4).

Rozwiązanie. Elementarne pole wynosi

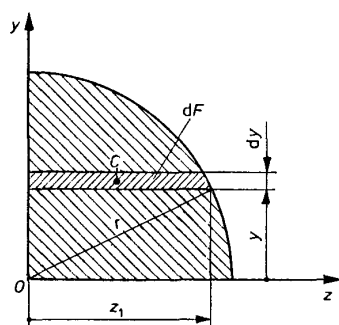
$$dF = z_1 dy = \sqrt{r^2 - y^2} dy$$

a współrzędna jego środka ciężkości

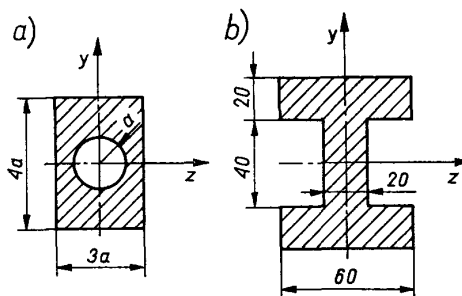
$$z = \frac{1}{2}z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - y^2}$$

Moment odśrodkowy wynosi

$$J_{yz} = \int_F yz dF = \int_0^r y \cdot \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - y^2} \sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^r y(r^2 - y^2) dy = \frac{1}{8}r^4$$



Rys. 7.4. Do zadania 7.4



Rys. 7.5. Do zadania 7.5

Zadanie 7.5. Obliczyć momenty bezwładności względem osi z figur przedstawionych na rys. 7.5.

ODPOWIEDŹ:

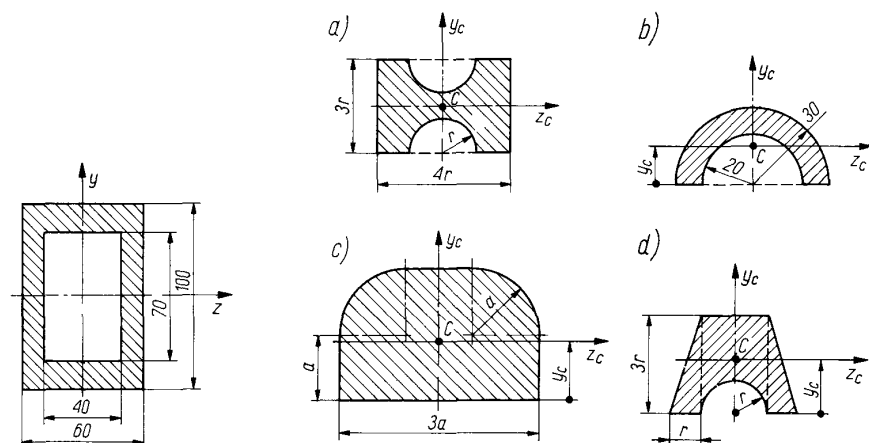
$$a) J_z = J_1 - J_2 = \frac{3a(4a)^3}{12} - \frac{\pi a^4}{4} = 15,1a^4$$

$$b) J_z = 234,7 \text{ cm}^4$$

Zadanie 7.6. Obliczyć momenty bezwładności względem osi y i z dla figury przedstawionej na rys. 7.6.

ODPOWIEDŹ:

$$J_y \approx 143 \text{ cm}^4, \quad J_z \approx 386 \text{ cm}^4$$



Rys. 7.6. Do zadania 7.6

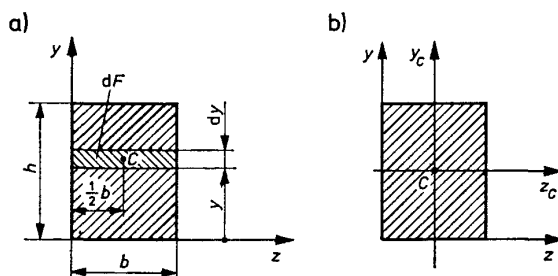
Rys. 7.7. Do zadania 7.7

Zadanie 7.7. Obliczyć momenty bezwładności figur podanych na rys. 7.7 względem osi y_c i z_c .

ODPOWIEDŹ:

- a) $J_{y_c} = 15,21r^4$, $J_{z_c} = 5,11r^4$
 b) $y_c = 1,528 \text{ cm}$, $J_{y_c} = 25,5 \text{ cm}^4$, $J_{z_c} = 5,2 \text{ cm}^4$
 c) $y_c = 0,93a$, $J_{y_c} = 3,76a^4$, $J_{z_c} = 1,69a^4$
 d) $y_c = 1,52r$, $J_{y_c} = 7,11r^4$, $J_{z_c} = 4,81r^4$

Zadanie 7.8. Obliczyć odśrodkowy moment bezwładności J_{yz} prostokąta.



Rys. 7.8. Do zadania 7.8

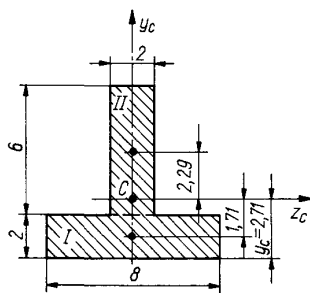
Rozwiązanie. *Metoda 1.* Nieskończenie mały element figury ma pole $dF = b dy$. Współrzędnymi środka ciężkości tego elementu są y oraz $z = b/2$. Moment odśrodkowy wynosi

$$J_{yz} = \int_F yz dF = \int_0^h y \frac{b}{2} b dy = \frac{b^2}{2} \left| \frac{y^2}{2} \right|_0^h = \frac{b^2 h^2}{4}$$

Metoda 2. Osie y_c i z_c są osiami głównymi (osie symetrii), a więc $J_{y_c z_c} = 0$. Stosując wzór Steinera, mamy

$$J_{yz} = J_{y_c z_c} + Fab = 0 + bh \frac{h}{2} \frac{b}{2} = \frac{b^2 h^2}{4}$$

Zadanie 7.9. Obliczyć moment bezwładności teownika względem osi równoległej do podstawy i przechodzącej przez środek ciężkości (rys. 7.9). Wymiary na rysunku są podane w cm.

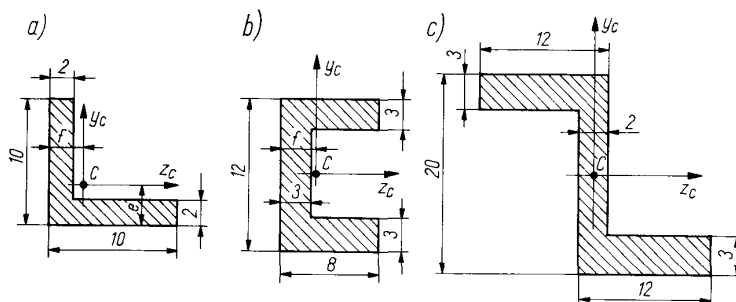


Rys. 7.9. Do zadania 7.9

ODPOWIEDŹ.

$$J_{z_c} = 151 \text{ cm}^4$$

Zadanie 7.10. Dla figur przedstawionych na rys. 7.10a, b i c wyznaczyć położenia środków ciężkości oraz obliczyć momenty bezwładności względem osi centralnych, których kierunki podano na rysunku. Wymiary na rysunku są podane w centymetrach.



Rys. 7.10. Do zadania 7.10

ODPOWIEDZ

a) $e = f = 3,22 \text{ cm}$, $J_{z_c} = J_{y_c} = 320 \text{ cm}^4$

b) $f = 3,32 \text{ cm}$, $J_{z_c} = 1062 \text{ cm}^4$, $J_{y_c} \approx 290 \text{ cm}^4$

c) $J_{z_c} \approx 5710 \text{ cm}^4$, $J_{y_c} = 2674 \text{ cm}^4$

Zadanie 7.11. Dla przekroju pokazanego na rys. 7.11a znaleźć położenie głównych centralnych osi bezwładności oraz obliczyć momenty bezwładności względem tych osi. Obliczenia zilustrować kołem Mohra.

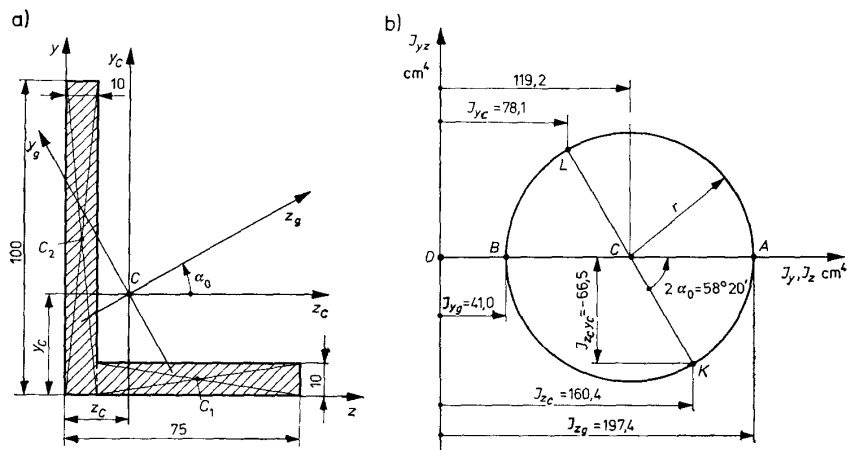
Rozwiązanie. Środek ciężkości figury ma współrzędne $y_c = 3,25 \text{ cm}$, $z_c = 2 \text{ cm}$. Momenty bezwładności J_{z_c} i J_{y_c} wynoszą

$$J_{z_c} = \frac{6,5 \cdot 1^3}{12} + 6,5 \cdot 1 \cdot (3,25 - 0,5)^2 + \frac{1 \cdot 10^3}{12} + 1 \cdot 10 \cdot (5 - 3,25)^2 = 160,4 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_c} = \frac{1 \cdot 6,5^2}{12} + 6,5 \cdot 1 \cdot (4,25 - 2)^2 + \frac{10 \cdot 1^3}{12} + 1 \cdot 10 \cdot (2 - 0,5)^2 = 78,1 \text{ cm}^4$$

Momenty odśrodkowe względem osi poziomej i pionowej, przechodzących przez środki ciężkości C_1 i C_2 , obu prostokątów są równe zero, a więc moment bezwładności odśrodkowy całego przekroju $J_{z_c y_c}$ wynosi

$$J_{z_c y_c} = 0 + 6,5 \cdot 1 \cdot (-2,75) \cdot 2 \cdot 25 + 0 + 1 \cdot 10 \cdot 1,75 \cdot (-1,5) = -66,5 \text{ cm}^4$$



Rys. 7.11. Do zadania 7.11

Kąt nachylenia głównej osi bezwładności obliczamy ze wzoru

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{z_c y_c}}{J_{y_c} - J_{z_c}} = \frac{2 \cdot (-66,5)}{78,1 - 160,4} = 1,62$$

stąd $2\alpha_0 = 58^\circ 20'$ i $\alpha_0 = 29^\circ 10'$.

Momenty bezwładności względem osi głównych obliczamy ze wzoru

$$\left. \begin{matrix} J_{max} \\ J_{min} \end{matrix} \right\} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2} \right)^2 + J_{yz}^2}$$

$$J_{max} = J_{z_g} = \frac{78,1 + 160,4}{2} + \sqrt{\left(\frac{78,1 - 160,4}{2} \right)^2 + (-66,5)^2} = 197,4 \text{ cm}^4$$

$$J_{min} = J_{y_g} = \frac{78,1 + 160,4}{2} - \sqrt{\left(\frac{78,1 - 160,4}{2} \right)^2 + (-66,5)^2} = 41,0 \text{ cm}^4$$

Koło Mohra dla momentów bezwładności (rys. 7.11b) rysujemy promieniem r o wartości

$$r = \sqrt{\left(\frac{J_{y_c} - J_{z_c}}{2} \right)^2 + (J_{z_c y_c})^2} = \sqrt{\left(\frac{78,1 - 160,4}{2} \right)^2 + (-66,5)^2} = 78,2 \text{ cm}^4$$

ze środka C o współrzędnej

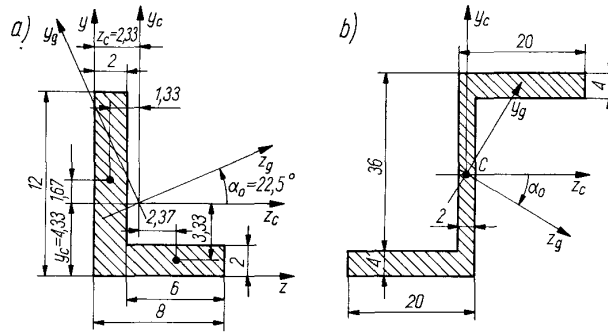
$$\overline{OC} = \frac{J_{y_c} + J_{z_c}}{2} = \frac{78,1 + 160,4}{2} = 119,2 \text{ cm}^4$$

Z koła Mohra odczytujemy

$$J_{max} = J_{z_g} = \overline{OC} + r = 119,2 + 78,2 = 197,4 \text{ cm}^4$$

$$J_{min} = J_{y_g} = \overline{OC} - r = 119,2 - 78,2 = 41,0 \text{ cm}^4$$

Zadanie 7.12. Dla przekrojów pokazanych na rys. 7.12 obliczyć momenty bezwładności względem osi głównych centralnych. Wymiary na rysunku są podane w cm.



Rys. 7.12. Do zadania 7.12

ODPOWIEDŹ:

a) $\alpha_0 = 22,5^\circ$, $J_{max} = 558 \text{ cm}^4$, $J_{min} = 106 \text{ cm}^4$

b) $\alpha_0 = -26,42^\circ$, $J_{max} = 70\,300 \text{ cm}^4$, $J_{min} = 4900 \text{ cm}^4$

Zginanie statycznie wyznaczalnych belek i ram

8

Wprowadzenie

W obliczeniach wytrzymałościowych belek i ram, pracujących głównie na zginanie, podstawową sprawą jest sporządzenie wykresu momentów gnących, a następnie zastosowanie wzoru

$$\sigma_g = \frac{M_{max}}{W} \leq k_g \quad (8.1)$$

gdzie

$$W = \frac{J_{z_c}}{y_{max}}$$

Oznaczenia w powyższych wzorach:

M_{max} – maksymalna wartość momentu gnącego,

W – wskaźnik wytrzymałości przekroju poprzecznego belki na zginanie (tabl. 21.2),

J_{z_c} – moment bezwładności przekroju poprzecznego belki względem osi obojętnej z_c (tabl. 21.2) – osi głównej centralnej,

y_{max} – odległość najdalszego włókna przekroju poprzecznego belki od osi obojętnej z tego przekroju,

k_g – naprężenie dopuszczalne na zginanie (na ogół $k_g = k_r$).

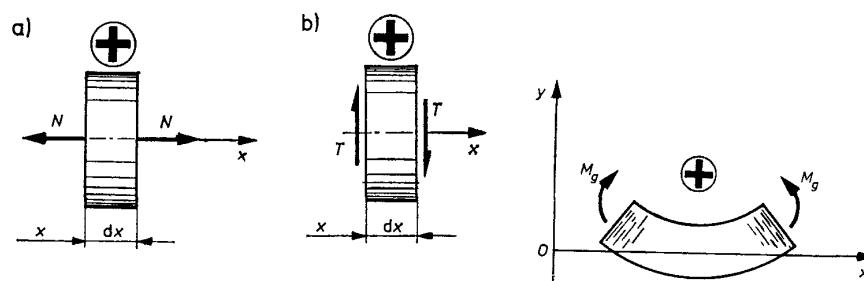
W obliczeniach belek i ram stosuje się następujące definicje sił normalnych N , sił tnących T i momentów gnących M_g .

1. Siłą normalną N w danym przekroju poprzecznym belki nazywamy rzut na kierunek normalnej wypadkowej wszystkich sił zewnętrznych działających na część belki odciętą tym przekrojem.

2. Siłą tnącą T w danym przekroju poprzecznym belki nazywamy rzut na płaszczyznę tego przekroju wypadkowej wszystkich sił zewnętrznych działających na część belki odciętą tym przekrojem.

3. Momentem gnącym M_g w danym przekroju belki nazywamy sumę momentów (względem środka ciężkości tego przekroju) wszystkich sił zewnętrznych działających na część belki odciętą tym przekrojem.

Oznaczenia dotyczące znaków sił normalnych, sił tnących i momentów gnących podano na rys. 8.1.



Rys. 8.1. Określanie dodatnich wartości sił normalnych N , sił tnących T i momentów gnących M_g

Zadanie 8.1. Taśmę stalową o grubości $g = 1$ mm nawinięto na wałek o średnicy $d = 40$ cm. Obliczyć naprężenia, jakie powstały w taśmie wykonanej ze stali sprężynowej, gdy $E = 2,2 \cdot 10^5$ MPa.

Rozwiązanie. Po nawinięciu taśmy o grubości g na wałek o średnicy d wydłużenie względne zewnętrznych włókien taśmy wynosi

$$\varepsilon = \frac{\pi[(d+2g) - (d+g)]}{\pi(d+g)} = \frac{g}{d+g} = \frac{1}{401} = 0,0025 \quad (a)$$

zatem naprężenia (rozciągające we włókienach zewnętrznych, a ściskające we włókienach przylegających do wałka) są równe

$$\sigma = \varepsilon E = 0,0025 \cdot 2,2 \cdot 10^5 = 550 \text{ MPa}$$

Zauważmy, że wymiar g występujący w mianowniku zależności (a) można pominąć jako bardzo mały w porównaniu z d .

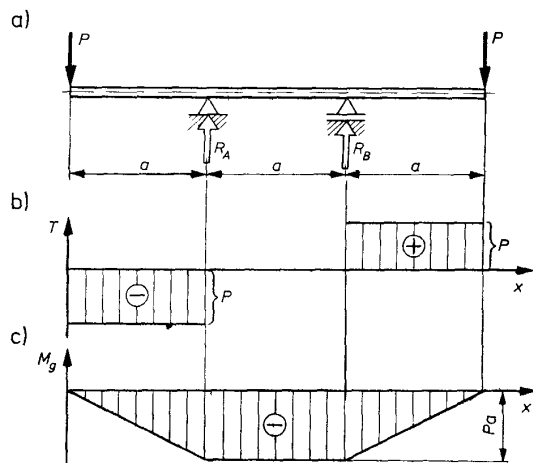
Zadanie 8.2. Lina stalowa złożona z drucików o średnicach $d = 0,8$ mm jest nawijana na bęben o średnicy $D = 40$ cm. Obliczyć, jakie naprężenia wywołane zginaniem powstają w drutach, jeżeli moduł Younga $E = 2,2 \cdot 10^5$ MPa.

Rozwiązanie. Podobnie jak w zadaniu poprzednim stosujemy wzór

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{d}{D} E = \frac{0,8}{400} \cdot 2,2 \cdot 10^5 = 440 \text{ MPa}$$

Zadanie 8.3. Wykonać wykresy sił tnących T i momentów gnących M_g dla belki przedstawionej na rys. 8.2a.

Rozwiązanie. $R_A = R_B = P$. Obliczenia są podane w tabelce i na tej podstawie sporządzono wykresy, pokazane na rys. 8.2b i c.



Rys. 8.2. Do zadania 8.3

Nr przedziału	Granice przedziału	Siła tnąca T	Moment gnący M_g	Obliczenia		
				x	T	M_g
1	$0 \leq x_1 \leq a$	$-P$	$-Px$	$x_1 = 0$	$-P$	0
				$x_1 = a$	$-P$	$-Pa$
2	$a \leq x_2 \leq 2a$	$-P + R_A = 0$	$-Px + R_A(x - a) = -Pa$	$x_2 = a$	0	$-Pa$
				$x_2 = 2a$	0	$-Pa$
3	$2a \leq x_3 \leq 3a$	$-P + R_A + R_B = +P$	$-Px + R_A(x - a) + R_B(x - 2a) = Px - 3Pa$	$x_3 = 2a$	$+P$	$-Pa$
				$x_3 = 3a$	$+P$	0

Zadanie 8.4. Obliczyć dopuszczalną wartość siły P , jaką można obciążyć belkę pokazaną na rys. 8.2, jeżeli $a = 1$ m, $k_g = 120$ MPa. Przekrojem poprzecznym belki jest teownik podany na rys. 7.9.

Rozwiązanie. Obliczenia przeprowadza się następująco

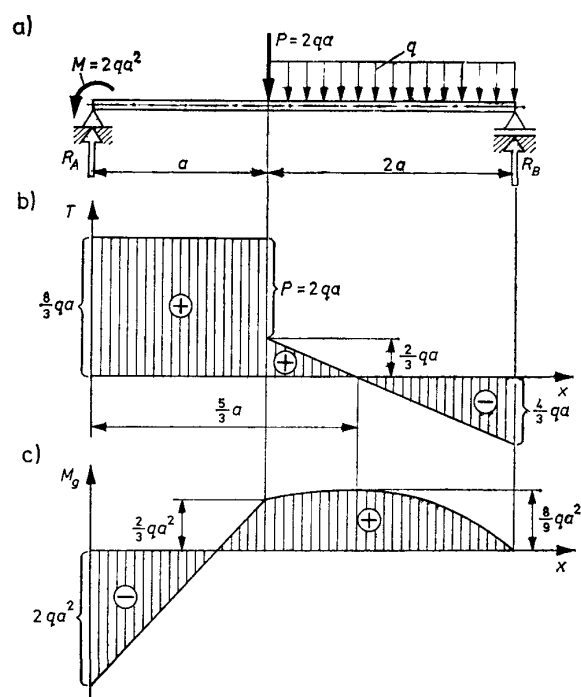
$$W_{z_c} = \frac{J_{z_c}}{y_{max}} = \frac{151 \text{ cm}^4}{5,29 \text{ cm}} = 28,5 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_g = \frac{M_{max}}{W_{z_c}} = \frac{Pa}{W_{z_c}} \leq k_g$$

stąd

$$P \leq \frac{k_g W_{z_c}}{a} = \frac{120 \cdot 28500}{1000} = 3420 \text{ N}$$

Zadanie 8.5. Wykonać wykresy sił tnących T i momentów gnących M_g dla belki przedstawionej na rys. 8.3.



Rys. 8.3. Do zadania 8.5

Rozwiązanie. Reakcje wynoszą

$$R_A = \frac{8}{3}qa, \quad R_B = \frac{4}{3}qa$$

Obliczenia są podane w tabelce.

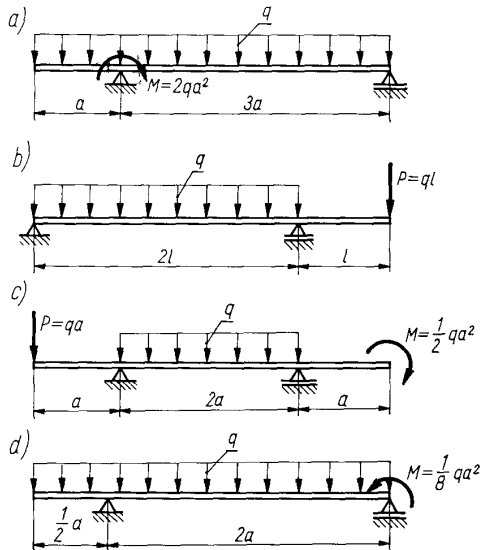
Nr przedziału	Granice przedziału	Siła tnąca T	Moment gnący M_g	Obliczenia		
				x	T	M_g
1	$0 \leq x_1 \leq a$	$+R_A = +\frac{8}{3}qa$	$-M + R_A x = -2qa^2 + \frac{8}{3}qax$	$x_1 = 0$	$+\frac{8}{3}qa$	$-2qa^2$
				$x_1 = a$	$+\frac{8}{3}qa$	$+\frac{2}{3}qa^2$
2	$a \leq x_2 \leq 3a$	$+R_A - P + -q(x-a) = \frac{2}{3}qa - q(x-a)$	$-M + R_A x + -P(x-a) + -\frac{1}{2}q(x-a)^2$	$x_2 = a$	$+\frac{2}{3}qa$	$+\frac{2}{3}qa^2$
				$x_2 = \frac{5}{3}a$	0	$+\frac{8}{9}qa^2$ (max)
				$x_2 = 3a$	$-\frac{4}{3}qa$	0

Zadanie 8.6. Przekrojem poprzecznym belki obliczanej w zadaniu poprzednim (8.5) jest kwadrat o boku h . Wyznaczyć wymaganą wielkość h , jeżeli $k_g = 120 \text{ MPa}$, $q = 2 \text{ N/mm}$, $a = 1 \text{ m}$.

ODPOWIEDŹ

$$h = 46 \text{ mm}$$

Zadanie 8.7. Dla belek pokazanych na rys. 8.4a, b, c, d wykonać wykresy T i M_g oraz określić największą wartość momentu gnącego M_{gmax} .



Rys. 8.4. Do zadania 8.7

ODPOWIEDŹ

a) $M_{gmax} = 2qa^2$, b) $M_{gmax} = ql^2$

c) $M_{gmax} = qa^2$, d) $M_{gmax} = \frac{65}{128}qa^2$

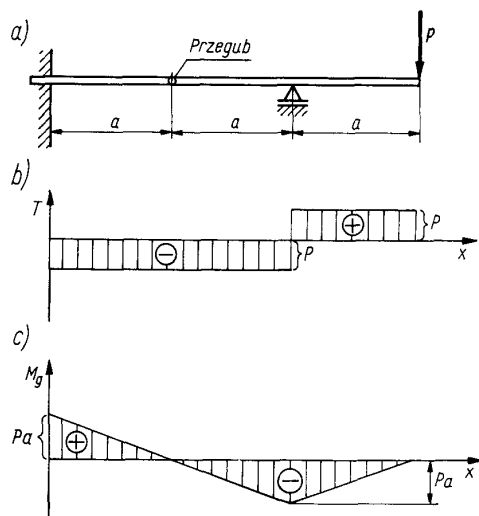
Zadanie 8.8. Wykonać wykresy T i M_g dla belki Gerbera przedstawionej na rys. 8.5.

ODPOWIEDZ Wykresy przedstawiono na rys. 8.5b i c.

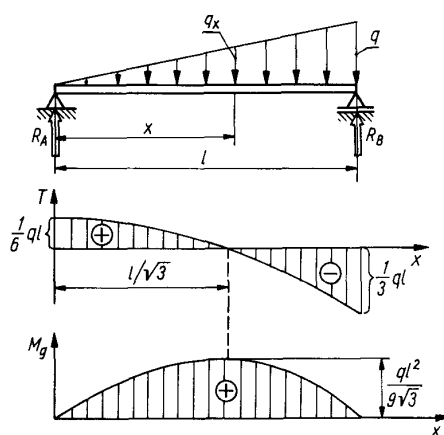
Zadanie 8.9. Wykonać wykresy sił tnących i momentów gnących dla belki przedstawionej na rys. 8.6.

Rozwiązanie. Dla przekroju określonego współrzędną x natężenie obciążenia ciągłego wynosi $q_x = q \frac{x}{l}$, zaś reakcje są równe

$$R_A = \frac{1}{6}ql, \quad R_B = \frac{1}{3}ql$$



Rys. 8.5. Do zadania 8.8



Rys. 8.6. Do zadania 8.9

siła tnąca

$$T = +R_A - \frac{1}{2} x q_x = \frac{1}{6} q l - \frac{1}{2} \frac{q x^2}{l}$$

Wykres jest parabolą drugiego stopnia przechodzącą przez punkty o współrzędnych

$$T_{(x=0)} = \frac{1}{6} q l, \quad T_{(x=l)} = -\frac{1}{3} q l$$

Maksimum siły tnącej występuje w miejscu, gdzie pierwsza pochodna, a więc i obciążenie ciągłe q_x , jest równa zero, a więc dla $x = 0$.

Moment gnący wynosi

$$M_g = +R_A x - \frac{1}{2} x q x \cdot \frac{1}{3} x = +\frac{1}{6} q l x - \frac{q x^3}{6l}$$

Wykres jest parabolą trzeciego stopnia

$$M_{g(x=0)} = 0, \quad M_{g(x=l)} = 0$$

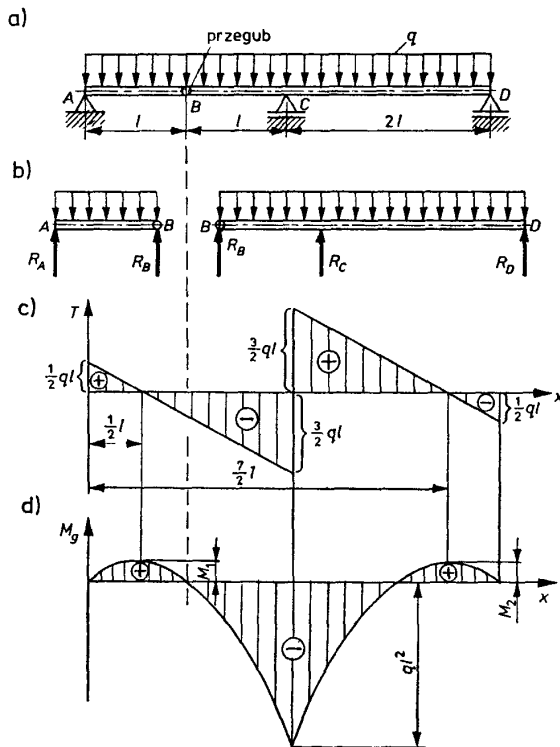
Maksimum występuje w przekroju, gdzie siła tnąca $T = 0$, a więc dla x_0 wyznaczonego z zależności

$$T = \frac{1}{6} q l - \frac{q x_0^2}{2l} = 0$$

stąd

$$x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577l, \quad M_{g_{max}} = \frac{q l^2}{9\sqrt{3}} = 0,064 q l^2$$

Zadanie 8.10. Wykonać wykresy sił tnących T i momentów gnących M_g dla belki przedstawionej na rys. 8.7.



Rys. 8.7. Do zadania 8.10

Rozwiązanie. Aby wyznaczyć reakcje podporowe, rozłączamy w myśli belkę w przegubie B . Otrzymujemy dwa samodzielne układy (rys. 8.7b).

Reakcje wynoszą

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}ql, \quad R_C = 3ql, \quad R_D = \frac{1}{2}ql$$

Znając reakcje można wykonać wykresy sił tnących i momentów gnących. Należy podkreślić, że przegub nie stanowi granicy przedziałów zmienności siły tnącej i momentu gnącego. Przebieg obliczeń jest przedstawiony w tabelce.

Nr przedziału	Granice przedziału	Siła tnąca T	Moment gnący M_g	Obliczenia		
				x	T	M_g
1	$0 \leq x_1 \leq 2l$	$\frac{1}{2}ql - qx$	$\frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2$	$x_1 = 0$	$\frac{1}{2}ql$	0
				$x_1 = \frac{1}{2}l$	0	$\frac{1}{8}ql^2$ (max)
				$x_1 = 2l$	$-\frac{3}{2}ql$	$-ql^2$
2	$2l \leq x_2 \leq 4l$	$\frac{1}{2}ql + 3ql - qx$	$\frac{1}{2}qlx + 3ql(x - 2l) - \frac{1}{2}qx^2$	$x_2 = 2l$	$+\frac{3}{2}ql$	$-ql^2$
				$x_2 = \frac{7}{2}l$	0	$\frac{1}{8}ql^2$ (max)
				$x_2 = 4l$	$-\frac{1}{2}ql$	0

W przedziale pierwszym maksimum momentu gnącego wynosi $M_1 = \frac{1}{8}ql^2$ dla $x_1 = \frac{1}{2}l$, a w przedziale drugim $M_2 = \frac{1}{8}ql^2$ dla $x_2 = \frac{7}{2}l$. Największy – co do bezwzględnej wartości – moment gnący występuje na podporze C i wynosi $M_C = -ql^2$.

Zadanie 8.11. Belka o długości $l = 2$ m oparta końcami na dwóch podporach i obciążona w sposób ciągły ($q = 10$ kN/m) ma przekrój prostokątny o wysokości dwukrotnie większej od szerokości ($h = 2b$). Obliczyć konieczną szerokość i wysokość belki, jeżeli naprężenia dopuszczalne na zginanie wynoszą $k_g = 150$ MPa.

Rozwiązanie. Maksymalny moment gnący dla belki wynosi

$$M_{gmax} = \frac{1}{8}ql^2 = 5000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Moment bezwładności przekroju poprzecznego $J_z = bh^3/12$, a $y_{max} = \frac{1}{2}h$, tak więc wskaźnik na zginanie przekroju poprzecznego wynosi $W_z = J_z/y_{max} = bh^2/6$.

Stosując wzór

$$\sigma_g = \frac{M_{gmax}}{W_z} = \frac{6M_{gmax}}{bh^2} \leq k_g$$

otrzymujemy

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3M_{gmax}}{2k_g}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5000}{2 \cdot 150 \cdot 10^6}} \text{ m} = 36,8 \text{ mm}$$

Zadanie 8.12. Zaprojektować belkę wspornikową o przekroju kołowym i długości $l = 240 \text{ cm}$ obciążoną na końcu siłą $P = 2 \text{ kN}$, jeżeli ma to być belka o równej wytrzymałości (w przybliżeniu) i prosta w wykonaniu (np. trzy wymiary - średnic), przy czym $k_g = 120 \text{ MPa}$, $k_t = 25 \text{ MPa}$.

Rozwiązanie. Największą średnicę d_1 w przekroju utwierdzenia, dla $M_{gmax} = Pl$, wyznaczamy ze wzoru

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{32Pl}{\pi k_g}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2000 \cdot 2400}{\pi \cdot 120}} = \sqrt[3]{407000} = 74 \text{ mm}$$

a średnicę d_3 z warunku na ścinanie

$$\tau = \frac{P}{F} = \frac{4P}{\pi d_3^2} \leq k_t$$

stąd

$$d_3 = \sqrt{\frac{4P}{\pi k_t}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2000}{\pi \cdot 25}} = 11 \text{ mm}$$

Dla tej wartości średnicy d_3 długość l_3 najcieńszej części belki byłaby bardzo mała, przyjmujemy więc średnicę d_3 znacznie większą, np. $d_3 = 4,6 \text{ cm}$ oraz $d_2 = 6,0 \text{ cm}$ (aby uzyskać jednakowe skoki średnic).

Długość l_3 końcowego odcinka belki wyznaczamy z warunku, by naprężenia na zginanie w przekroju przejścia na średnicę d_2 były równe dopuszczalnym

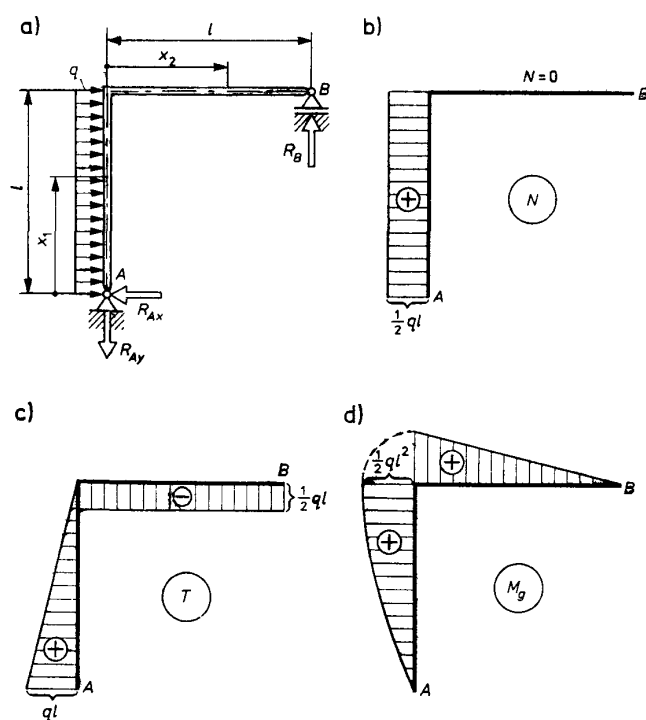
$$M_m = Pl_3 \leq k_g W_g = k_g \frac{\pi d^3}{32}$$

stąd znajdujemy $l_3 = 57 \text{ cm}$. Podobnie obliczamy $l_2 = 128 \text{ cm}$.

Zadanie 8.13. Dla ramy przedstawionej na rys. 8.8a wykonać wykresy sił wewnętrznych: sił normalnych N , sił tnących T i momentów gnących M_g .

Rozwiązanie. Reakcje podpór wynoszą

$$R_{Ax} = ql, \quad R_{Ay} = R_B = \frac{1}{2}ql$$



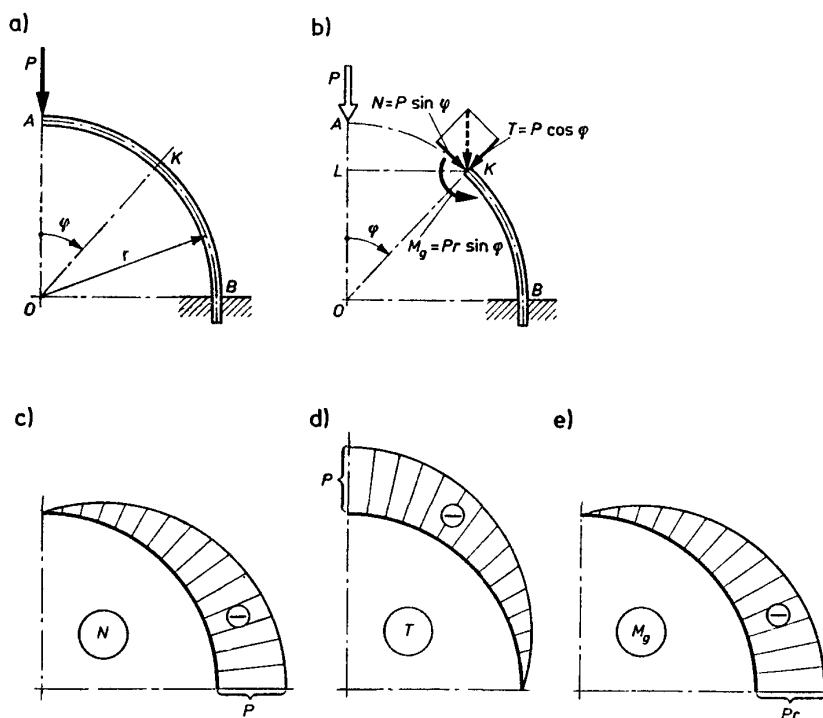
Rys. 8.8. Do zadania 8.13

Nr przedziału	Granice przedziału	Siła normalna N	Siła tnąca T	Moment gnący M_g	Obliczenia		
					x	T	M_g
1	$0 \leq x_1 \leq l$	$+R_{Ay} = +\frac{1}{2}ql$	$+R_{Ax} - qx = ql - qx$	$+R_{Ax}x - \frac{1}{2}qx^2 = qlx - \frac{1}{2}qx^2$	0	$+ql$	0
					l	0	$+\frac{1}{2}ql^2$
2	$0 \leq x_2 \leq l$	0	$-R_{Ay} = -\frac{1}{2}ql$	$+R_{Ax}l - \frac{1}{2}ql^2 + -R_{Ay}x = \frac{1}{2}ql^2 - \frac{1}{2}qlx$	0	$-\frac{1}{2}ql$	$+\frac{1}{2}ql^2$
					l	$-\frac{1}{2}ql$	0

Wykresy są przedstawione na rys. 8.8b, c i d.

Zadanie 8.14. Wykonać wykresy sił wewnętrznych: sił normalnych N , sił tnących T i momentów gnących M_g dla łuku pokazanego na rys. 8.9a.

Rozwiązanie. Dla prętów zakrzywionych w kształcie łuku koła położenie dowolnego przekroju poprzecznego wygodnie jest określać współrzędną kątową φ ,



Rys. 8.9. Do zadania 8.14

jak to zaznaczono na rys. 8.9a. Definicje sił wewnętrznych, tj. siły normalnej, siły tnącej i momentu gnącego są podane we wprowadzeniu również dla prętów zakrzywionych.

Aby wyznaczyć siły wewnętrzne w przekroju określonym kątem φ , odrzucamy (w myśli) część AK pręta i siłę P redukujemy do punktu K , tj. do środka ciężkości danego przekroju poprzecznego (rys. 8.9b). Moment gnący M_g w danym przekroju jest równy momentowi siły P względem punktu K i wynosi

$$M_g = -P(KL) = -Pr \sin \varphi$$

Siła tnąca jest równa rzutowi siły P na styczną do przekroju (na prostą OK)

$$T = -P \cos \varphi$$

a siła normalna na normalną do przekroju

$$N = -P \sin \varphi$$

W celu łatwiejszego wykonania wykresów wartości sił wewnętrznych dla kątów φ zestawiono w poniższej tabelce.

φ	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$M_g = -Pr \sin \varphi$	0	$-\frac{1}{2}Pr$	$-0,707Pr$	$-0,866Pr$	$-Pr$
$T = -P \cos \varphi$	$-P$	$-0,866P$	$-0,707P$	$-\frac{1}{2}P$	0
$N = -P \sin \varphi$	0	$-\frac{1}{2}P$	$-0,707P$	$-0,866P$	$-P$

Wykresy sił wewnętrznych są przedstawione na rys. 8.9c, d i e.

Zadanie 8.15. Wykonać wykresy sił wewnętrznych: sił normalnych N , sił tnących T i momentów gnących M_g dla prętów przedstawionych na rys. 8.10a i b.

ODPOWIEDŹ. Wykresy sił wewnętrznych dla pręta z rys. 8.10a pokazano na rys. 8.10c, d i e, a dla pręta z rys. 8.10b – na rys. 8.10f, g i h.

Zadanie 8.16. Dla ram przedstawionych na rys. 8.11a i b wykonać wykresy sił wewnętrznych: sił normalnych N , sił tnących T i momentów gnących M_g .

ODPOWIEDŹ. Wykresy przedstawiono na rys. 8.11c-h.

Zadanie 8.17. Belka wspornikowa o długości $l = 0,8$ m jest obciążona na końcu pionową siłą $P = 10$ kN (rys. 8.12). Belka została wykonana z kątownika równoramiennego o wymiarach $150 \times 150 \times 20$. Z tablic wyrobów hutniczych dla kątownika tego odczytano: $e = 4,46$ cm, $J_{y_c} = 1154$ cm⁴, $J_{y_g} = 1830$ cm⁴, $J_{z_g} = 480$ cm⁴. Obliczyć największe naprężenie od zginania.

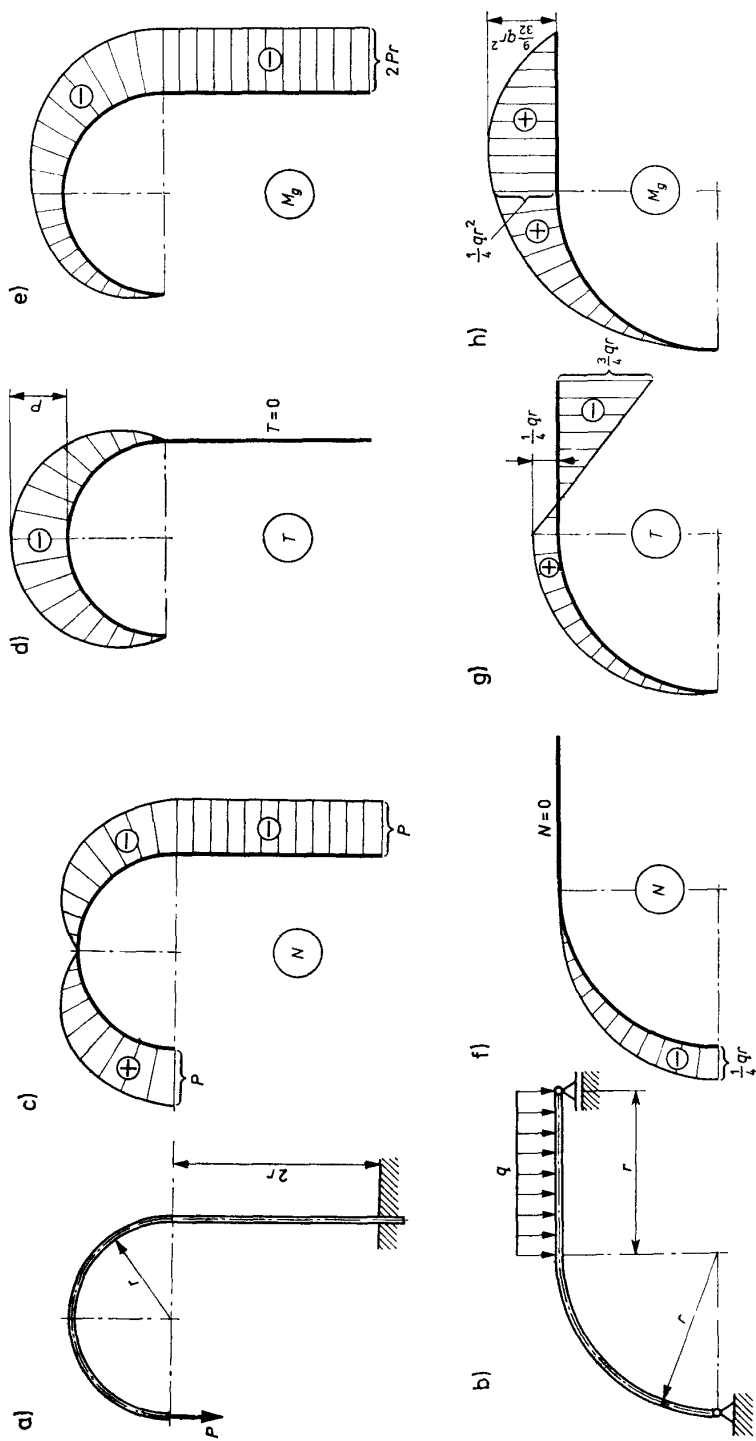
Rozwiązanie. Położenie przekroju poprzecznego belki względem siły obciążającej P podano na rys. 8.12. Najbardziej obciążony jest przekrój belki w miejscu utwierdzenia, gdzie moment gnący osiąga wartość $M_g = Pl = 8000$ N·m. Moment ten działa w płaszczyźnie pionowej, która w danym przypadku nie jest płaszczyzną główną belki. Oś główną przekroju jest oczywiście oś symetrii Cy_g , która tworzy z poziomą osią Cy_c kąt $\alpha_0 = 45^\circ$.

Mamy więc do czynienia ze zginaniem ukośnym. W takim przypadku oś obojętna nie jest prostopadła do płaszczyzny głównej centralnej, lecz tworzy z nią kąt β_0 , określony wzorem

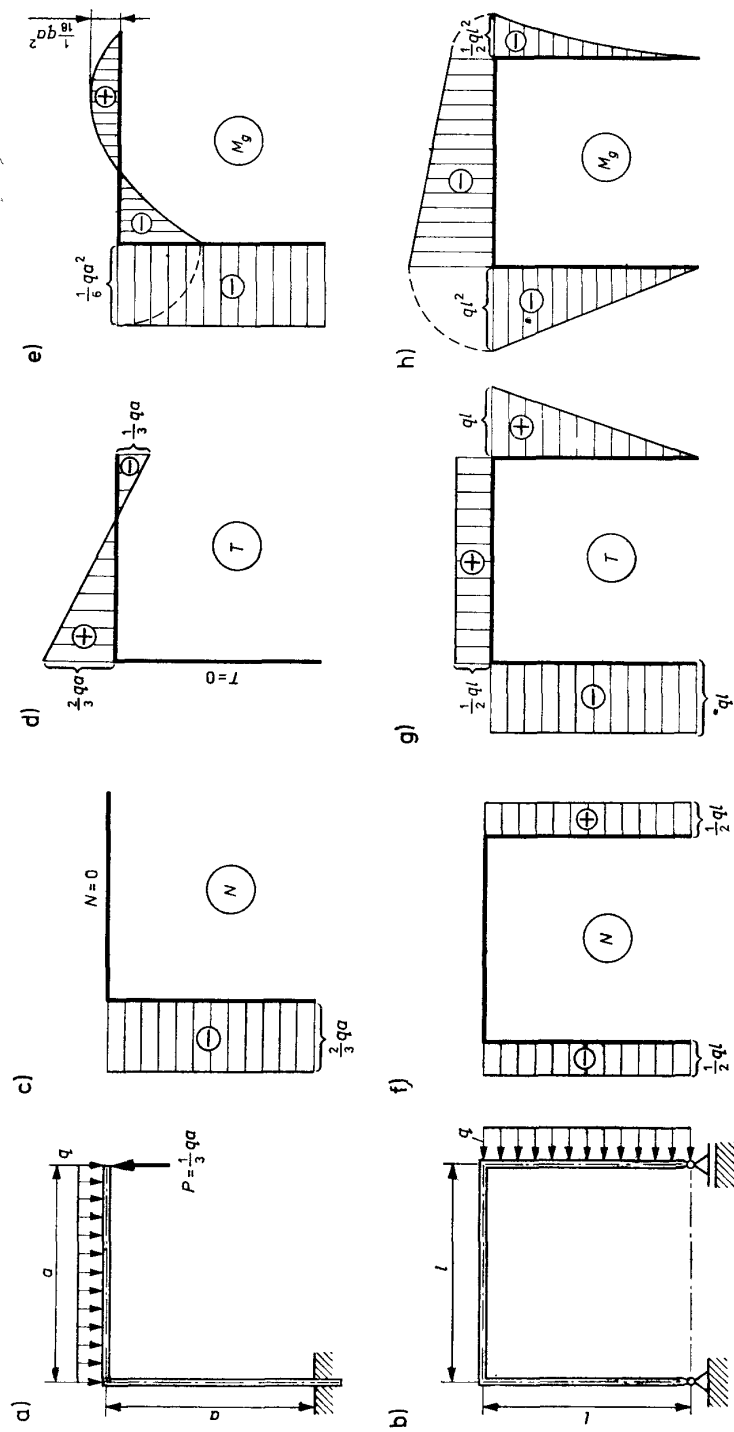
$$\operatorname{tg} \beta_0 = \operatorname{tg} \alpha_0 \frac{J_{y_g}}{J_{z_g}} = 1 \cdot \frac{1830}{480} = 3,83$$

skąd $\beta_0 = 75^\circ$.

Najbardziej oddalonym od osi obojętnej punktem przekroju jest punkt K , którego współrzędne, wyznaczone na podstawie rysunku, wynoszą: $y_K = 4,3$ cm,



Rys. 8.10. Do zadania 8.15



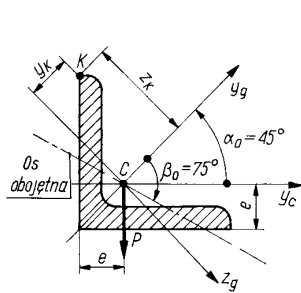
Rys. 8.11. Do zadania 8.16

$z_K = -10.6$ cm. Naprężenia w punkcie K wyrażają się zależnością

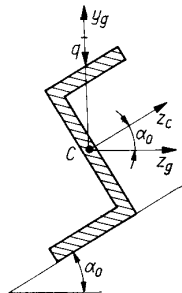
$$\sigma_K = \left| \frac{M_y z_K}{J_y} \right| + \frac{M_z y_K}{J_z} = \frac{565\,600 \cdot 10,6}{1830} + \frac{565\,600 \cdot 4,3}{480} = 8300 \text{ N/cm}^2 = 83 \text{ MPa}$$

gdzie składowe momentu gnącego M względem głównych centralnych osi bezwładności przekroju wynoszą

$$M_y = M_z = \cos \alpha_0 \cdot M_g = 0,707 \cdot 8000 = 5656 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Rys. 8.12. Do zadania 8.17



Rys. 8.13. Do zadania 8.18

Zadanie 8.18. Przekrojem poprzecznym belki obciążonej siłami pionowymi jest zetownik podany na rys. 7.12b. Jak należy ustawić belkę, by znajdowała się ona w najkorzystniejszych warunkach, jeżeli chodzi o zginanie? Obliczyć, jakim obciążeniem ciągłym o natężeniu stałym q N/mm może być obciążona belka, jeżeli $k_g = 140$ MPa, długość belki $l = 4$ m. Belka jest podparta swobodnie na obu końcach.

ODPOWIEDŹ. Belkę należy ustawić w sposób pokazany na rys. 8.13, zaś kąt nachylenia wynosi $\alpha_0 = 26,42^\circ$, a $q = 185$ N/mm.

Zadanie 8.19. Obliczyć wskaźniki wytrzymałości na zginanie względem osi głównych centralnych dla kątownika podanego na rys. 7.12a.

ODPOWIEDŹ:

$$W_{gz1} = 70 \text{ cm}^3, \quad W_{gz2} = 90 \text{ cm}^3, \quad W_{gy1} = 27,8 \text{ cm}^3, \quad W_{gy2} = 24,2 \text{ cm}^3$$

Hipotezy wytrzymałościowe.

Wytrzymałość złożona

9

Wprowadzenie

W odniesieniu do materiałów izotropowych mających granicę plastyczności (wyrażną lub umowną) najlepszą zgodność z doświadczeniem daje hipoteza wytrzymałościowa Hubera. Jeżeli stan napięcia w najbardziej obciążonym punkcie ciała jest wyrażony przez naprężenia główne: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, wówczas naprężenia zredukowane są określone wzorem

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq k_r \quad (9.1)$$

Gdy stan naprężeń jest określony przez naprężenie normalne σ oraz naprężenie styczne τ , wówczas

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq k_r \quad (9.2)$$

W obliczeniach dotyczących materiałów plastycznych obok hipotezy Hubera stosuje się również hipotezę τ_{max} (największych naprężeń stycznych, Coulomba), dającą w zastosowaniach prostsze zależności. Naprężenie zredukowane dla stanu napięcia określonego przez naprężenia główne $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ wyraża się wzorem

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq k_r \quad (9.3)$$

zaś dla stanów określonych naprężeniami normalnymi σ i stycznymi τ

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq k_r \quad (9.4)$$

Dla materiałów kruchych, takich jak żeliwo, odlewy z metali kolorowych, stosuje się hipotezę największego wydłużenia względnego ε_{max}

$$\sigma_{red} = \sigma_{max} - \nu\sigma_{min} \leq k_r \quad (9.5)$$

Napężenia styczne w przekroju poprzecznym belki, w którym działa siła tnąca T , oblicza się ze wzoru Żurawskiego

$$\tau_y = \frac{TS_y^{y_{max}}}{b_y J_z} \quad (9.6)$$

gdzie: τ_y – napężenie styczne w punktach przekroju belki położonych w odległości y od warstwy obojętnej, $S_y^{y_{max}}$ – moment statyczny względem osi obojętnej tej części przekroju poprzecznego, która jest zawarta między współrzędnymi y i y_{max} odmierzanymi od osi obojętnej (w niektórych zadaniach oznaczany literą S), b_y – szerokość przekroju poprzecznego belki na poziomie określonym współrzędną y , J_z – moment bezwładności całego przekroju poprzecznego belki względem osi obojętnej pokrywającej się z osią z .

Zadanie 9.1. Napężenia dopuszczalne na rozciąganie dla płyty stalowej wynoszą $k_r = 180$ MPa. Jakie można przyjąć napężenia dopuszczalne na ścinanie k_t ?

Rozwiązanie. Stan czystego ścinania powstaje wówczas, gdy $\sigma_1 = +\sigma = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma = -\tau$. Po podstawieniu tych wartości do wzoru (9.1) oraz (9.3) otrzymujemy:

a) według hipotezy Hubera

$$k_t = 0,58k_r = 104.4 \text{ MPa}$$

b) według hipotezy τ_{max}

$$k_t = 0,5k_r = 90 \text{ MPa}$$

Zadanie 9.2. W najbardziej niebezpiecznym punkcie konstrukcji napężenia główne wynoszą: $\sigma_1 = 140$ MPa, $\sigma_2 = 60$ MPa, $\sigma_3 = -40$ MPa. Obliczyć napężenia zredukowane według hipotezy τ_{max} oraz hipotezy Hubera. Ustalić, czy konstrukcja może bezpiecznie pracować, jeżeli $k_r = 160$ MPa.

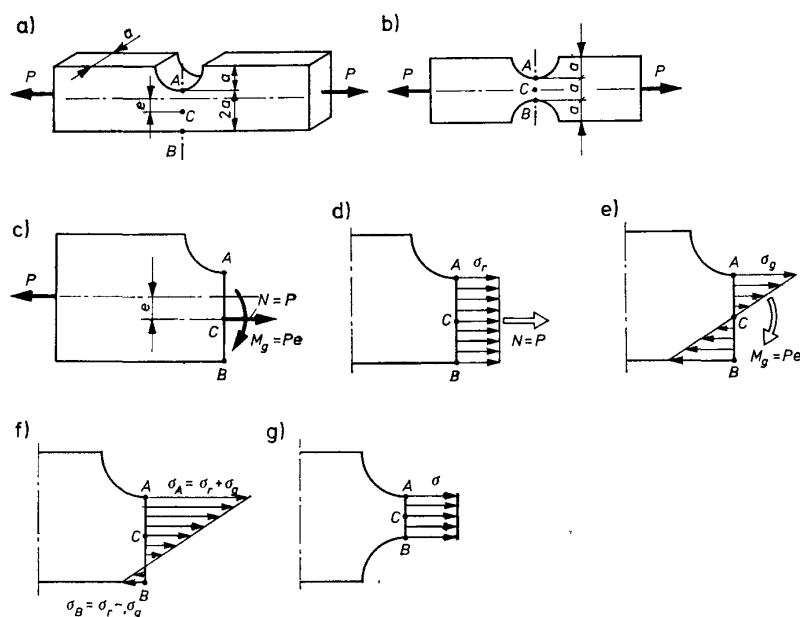
ODPOWIEDŹ. Według hipotezy τ_{max} napężenie zredukowane $\sigma_{red} = 180$ MPa, zaś według hipotezy Hubera $\sigma_{red} = 156$ MPa. Konstrukcja może bezpiecznie pracować (najlepszą zgodność z doświadczeniem daje hipoteza Hubera).

Zadanie 9.3. Obliczyć średnicę wału według hipotezy Hubera, jeżeli $M_s = 400 \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_g = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}$, $k_r = k_g = 70$ MPa.

ODPOWIEDŹ:

$$d = 5,33 \approx 5,4 \text{ cm}$$

Zadanie 9.4. Płaskownik rozciągany siłą P wykonano w dwóch wersjach przedstawionych na rys. 9.1a i b. Obliczyć w obu przypadkach największe napężenia zredukowane i wskazać, która wersja jest korzystniejsza z punktu widzenia wytrzymałości układu.



Rys. 9.1. Do zadania 9.4

Rozwiązanie

Wersja a. Przecinamy (w myśli) płaskownik w najbardziej osłabionym przekroju i siły zewnętrzne działające na odrzuconą (np. prawą) część płaskownika redukujemy do środka ciężkości C rozpatrywanego przekroju (rys. 9.1c). W przekroju tym płaskownik jest obciążony siłą normalną $N = P$, powodującą powstanie naprężeń rozciągających

$$\sigma_r = \frac{N}{F} = \frac{P}{2a^2}$$

oraz jest zginany momentem $M_g = Pe = \frac{1}{2}Pa$, powodującym powstanie naprężeń gnących

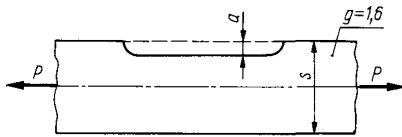
$$\sigma_g = \frac{M_g}{W} = \frac{\frac{1}{2}Pa}{\frac{1}{6}a(2a)^2} = \frac{3P}{4a^2}$$

Rozkład naprężeń rozciągających przedstawiono na rys. 9.1d, naprężeń gnących – na rys. 9.1e, a wypadkowych – na rys. 9.1f. Największe naprężenia występują w punkcie A i wynoszą

$$\sigma_A = \sigma_r + \sigma_g = \frac{P}{2a^2} + \frac{3P}{4a^2} = \frac{5}{4} \frac{P}{a^2}$$

Wersja b. Dzięki temu, że wykonano drugie symetryczne wycięcie (rys. 9.1b), nie ma zginania płaskownika. W najsłabszym przekroju $A-B$ występują jedynie naprężenia rozciągające $\sigma = P/a^2$ (rys. 9.1g), a więc w tej wersji naprężenia maksymalne w płaskowniku zmalały (wpływu koncentracji naprężeń nie uwzględniono).

Zadanie 9.5. W płaskowniku o grubości $g = 1.6$ cm i szerokości $s = 10$ cm rozciągany siłą $P = 80.0$ kN powstało pęknięcie z jednej strony, oznaczonej linią przerywaną na rys. 9.2. W celu zabezpieczenia przed dalszym powiększeniem się szczeliny wyfrezowano w płaskowniku wycięcie o głębokości $a = 2$ cm. Obliczyć maksymalne naprężenia, jakie wystąpią w płaskowniku.



Rys. 9.2. Do zadania 9.5

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_{max} = 112,5 \text{ MPa}$$

Zadanie 9.6. Ustalić, czy w zadaniu poprzednim jest wskazane wyfrezowanie drugiego symetrycznego wycięcia o takiej samej głębokości $a = 2$ cm.

ODPOWIEDŹ. Tak – naprężenia maksymalne w płaskowniku wyniosą wówczas tylko 83,3 MPa.

Zadanie 9.7. Określić najbardziej niebezpieczny przekrój oraz największe naprężenia zredukowane pręta pokazanego na rys. 9.3a.

Rozwiązanie. Pręt jest zginany i skręcany. Wykresy momentów gnących i skręcających przedstawiono na rys. 9.3b i c. Najbardziej obciążonym przekrojem pręta jest przekrój w utwierdzeniu. Naprężenia maksymalne od zginania i od skręcania wynoszą

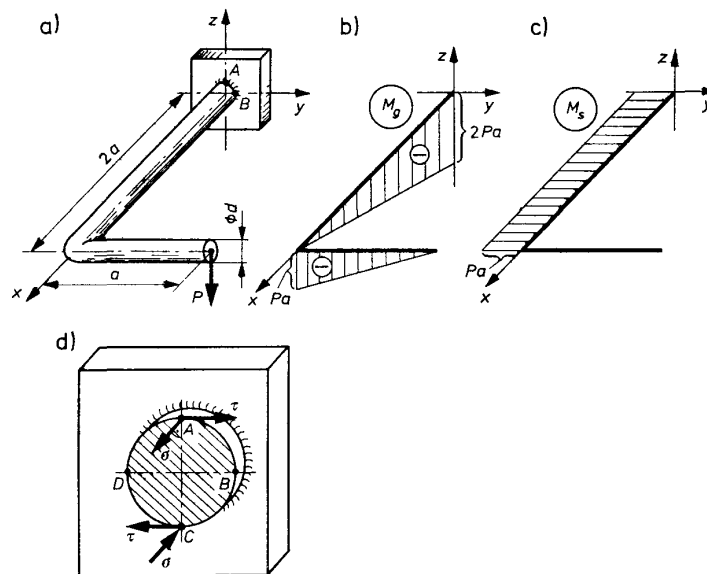
$$\sigma = \frac{M_g}{W} = \frac{2Pa}{\frac{1}{32}\pi d^3} = \frac{64Pa}{\pi d^3}, \quad \tau = \frac{M_s}{W_0} = \frac{Pa}{\frac{1}{16}\pi d^3} = \frac{16Pa}{\pi d^3}$$

Największe naprężenia występują w punktach A i C przekroju utwierdzonego (rys. 9.3d). W obu tych punktach naprężenia zredukowane są jednakowe i wynoszą

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{Pa}{\pi d^3} \sqrt{64^2 + 3 \cdot 16^2} = \frac{70Pa}{\pi d^3}$$

Moment zastępczy w utwierdzeniu wynosi

$$M_{z1} = \sqrt{M_g^2 + \frac{3}{4}M_s^2} = \sqrt{(2Pa)^2 + \frac{3}{4}(Pa)^2} = 2,18Pa$$



Rys. 9.3. Do zadania 9.7

Największe naprężenie zredukowane występuje w przekroju utwierdzonym pręta i jest równe

$$\sigma_{red} = \frac{M_{z1}}{W} = \frac{2,18Pa}{\frac{1}{32}\pi d^3} = \frac{70Pa}{\pi d^3}$$

Zadanie 9.8. Obliczyć konieczną średnicę wału przedstawionego na rys. 9.4a, mając dane: siłę $P = 20 \text{ kN}$, promień $r = 30 \text{ cm}$, długość $l = 50 \text{ cm}$, naprężenie dopuszczalne $k_g = 100 \text{ MPa}$.

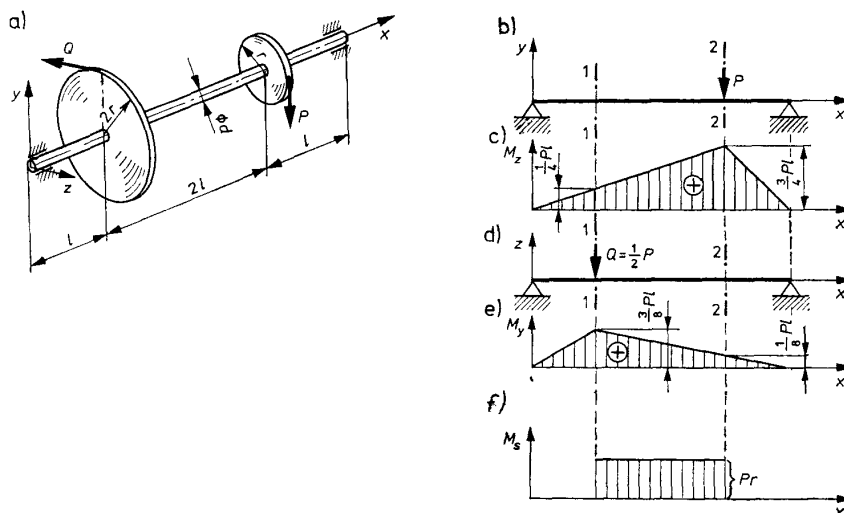
Rozwiązanie. Wał znajduje się w równowadze, a więc suma momentów względem osi wału musi być równa zero

$$Q \cdot 2r - Pr = 0$$

stąd

$$Q = \frac{1}{2}P = 10 \text{ kN}$$

Wał jest zginany w dwóch płaszczyznach oraz skręcany. Obciążenie zginające wał w płaszczyźnie pionowej yx pokazano na rys. 9.4b, a odpowiadający temu wykres momentów gnących M_z – na rys. 9.4c. Podobnie obciążenie w płaszczyźnie poziomej zx podano na rys. 9.4d, a wykres M_y – na rys. 9.4e. Wykres momentów skręcających przedstawiono na rys. 9.4f. Momenty M_y i M_z leżą w płaszczyznach



Rys. 9.4. Do zadania 9.8

do siebie prostopadłych, a więc wypadkowy moment gnący w przekroju 1-1 wału wynosi

$$M_{g1} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}Pl\right)^2 + \left(\frac{3}{8}Pl\right)^2} = 0,45Pl = 4500 \text{ N} \cdot \text{m}$$

a w przekroju 2-2

$$M_{g2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}Pl\right)^2 + \left(\frac{1}{8}Pl\right)^2} = 0,76Pl = 7600 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Obydwa przekroje są obciążone takim samym momentem skręcającym $M_s = Pr = 6000 \text{ N} \cdot \text{m}$ (rys. 9.4f), a więc najbardziej obciążony jest przekrój 2-2.

Moment zastępczy w przekroju 1-1 wynosi

$$M_{z1} = \sqrt{M_g^2 + \frac{3}{4}M_s^2} = \sqrt{4500^2 + \frac{3}{4} \cdot 6000^2} = 6875 \text{ N} \cdot \text{m}$$

a w przekroju 2-2

$$M_{z2} = \sqrt{7600^2 + \frac{3}{4} \cdot 6000^2} = 9200 \text{ N} \cdot \text{m}$$

W najbardziej obciążonym przekroju 2-2 naprężenie zredukowane wynosi

$$\sigma_{red} = \frac{M_{z2}}{W} = \frac{32M}{\pi d^3} \leq k_g$$

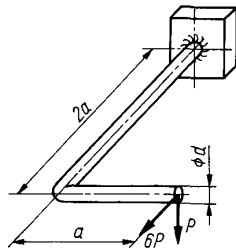
a więc

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M}{\pi k_g}} = 98 \text{ mm}$$

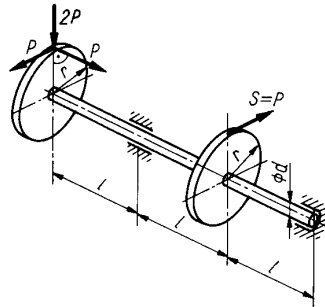
Zadanie 9.9. Dla pręta pokazanego na rys. 9.5 obliczyć dopuszczalną wartość siły P , mając dane: $a = 10 \text{ cm}$, $d = 2 \text{ cm}$, $k_r = 120 \text{ MPa}$.

ODPOWIEDŹ:

$$P \leq 144 \text{ N}$$



Rys. 9.5. Do zadania 9.9



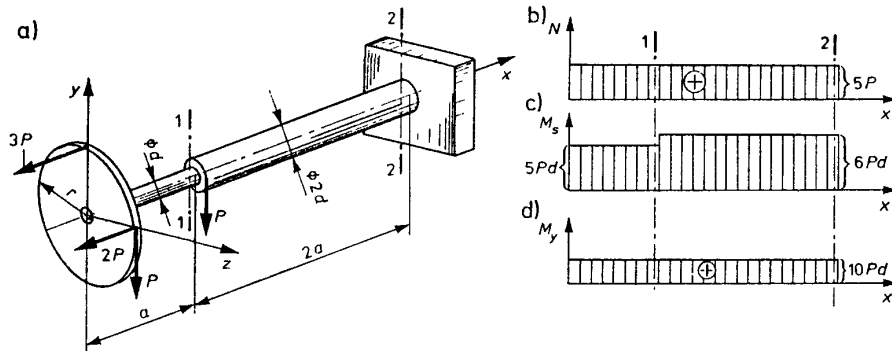
Rys. 9.6. Do zadania 9.10

Zadanie 9.10. Dla wału przedstawionego na rys. 9.6 obliczyć dopuszczalną wartość siły P , mając dane: $k_r = 120 \text{ MPa}$, $d = 40 \text{ mm}$, $r = 160 \text{ mm}$, $l = 320 \text{ mm}$.

ODPOWIEDŹ:

$$P \leq 1260 \text{ N}$$

Zadanie 9.11. Obliczyć największe naprężenia zredukowane w wale pokazanym na rys. 9.7a, przyjmując $r = 5d$, $a = 6d$.



Rys. 9.7. Do zadania 9.11

Rozwiązanie. Wykresy obciążeń wału przedstawiono na rys. 9.7b-d. Niebezpiecznymi przekrojami wału są: dla cieńszej części wału przekrój 1-1, a dla grubszej przekrój 2-2.

Naprężenia w przekroju 1-1 wynoszą

$$\sigma_r = \frac{N}{F} = \frac{5P}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{20P}{\pi d^2}, \quad \tau_1 = \frac{M_s}{W_0} = \frac{5Pd}{\frac{1}{16}\pi d^3} = \frac{80P}{\pi d^2}$$

$$M_w = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(10Pd)^2 + (21Pd)^2} = 23,2Pd$$

$$\sigma_g = \frac{M_w}{W_z} = \frac{23,2Pd}{\frac{1}{32}\pi d^3} = \frac{742P}{\pi d^2}$$

$$\sigma_1 = \sigma_r + \sigma_g = \frac{762P}{\pi d^2}$$

$$\sigma_{1red} = \sqrt{\sigma_1^2 + 3\tau_1^2} = \frac{P}{\pi d^2} \sqrt{762^2 + 3 \cdot 80^2} = \frac{774P}{\pi d^2}$$

Naprężenia w przekroju 2-2 wynoszą

$$\sigma_r = \frac{5P}{\frac{1}{4}\pi(2d)^2} = \frac{5P}{\pi d^2}, \quad \tau_2 = \frac{6Pd}{\frac{1}{16}\pi(2d)^3} = \frac{12P}{\pi d^2}$$

$$M_w = Pd\sqrt{10^2 + 45^2} = 46,1Pd$$

$$\sigma_g = \frac{46,1Pd}{\frac{1}{32}\pi(2d)^3} = \frac{184,4P}{\pi d^2}$$

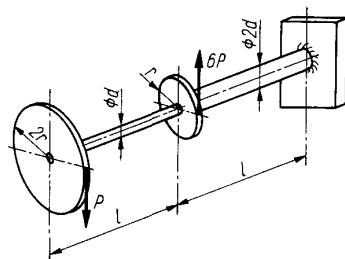
$$\sigma_2 = \sigma_r + \sigma_g = \frac{189,4P}{\pi d^2}$$

$$\sigma_{2red} = \sqrt{\sigma_2^2 + 3\tau_2^2} = \frac{P}{\pi d^2} \sqrt{189,4^2 + 3 \cdot 12^2} = \frac{190P}{\pi d^2} < \sigma_{1red}$$

Zadanie 9.12. Obliczyć dopuszczalną wartość siły P obciążającej pokazany na rys. 9.8 pręt, mając dane: $l = 30$ cm, $r = 10$ cm, $d = 5$ cm, $k_g = 120$ MPa.

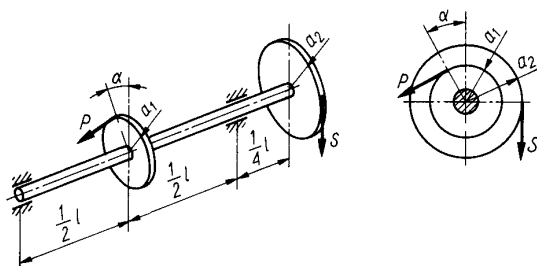
ODPOWIEDŹ:

$$P = 4200 \text{ N}$$



Rys. 9.8. Do zadania 9.12

Zadanie 9.13. Obliczyć średnicę wału przedstawionego na rys. 9.9. Dane: $P = 8 \text{ kN}$, $l = 1 \text{ m}$, $a_1 = 0,2 \text{ m}$, $a_2 = 0,3 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$, $k_g = 120 \text{ MPa}$.

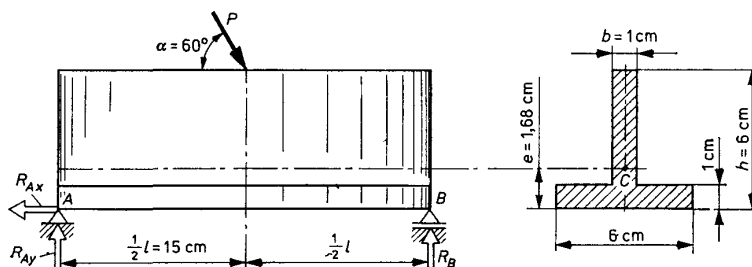


Rys. 9.9. Do zadania 9.13

ODPOWIEDŹ:

$$d \geq 57,2 \text{ mm}$$

Zadanie 9.14. Ustalić, czy przedstawiona na rys. 9.10 belka żeliwna może pracować bezpiecznie, jeżeli $P = 40 \text{ kN}$, a naprężenia dopuszczalne wynoszą: $k_c = 300 \text{ MPa}$, $k_r = 100 \text{ MPa}$.



Rys. 9.10. Do zadania 9.14

Rozwiązanie. Reakcje wynoszą: $R_{Ax} = 20,0 \text{ kN}$, $R_{Ay} = 13,3 \text{ kN}$. Najbardziej obciążony jest przekrój w połowie długości belki. Występuje tu siła normalna $N = R_{Ax} = 20,0 \text{ kN}$, siła tnąca $T = R_{Ay} = 13,3 \text{ kN}$, moment gnący

$M_g = R_{Ay} \cdot \frac{1}{2}l + R_{Ax}e = 2340 \text{ N} \cdot \text{m}$. Pole przekroju poprzecznego $F = 11 \text{ cm}^2$,
a moment bezwładności względem osi obojętnej $J_z = 35,9 \text{ cm}^4$.

Napężenia od rozciągania wynoszą

$$\sigma_r = \frac{N}{F} = \frac{20000}{1100} = 18,2 \text{ MPa}$$

W górnych włóknach od zginania występują napężenia ściskające σ_{g1} , a w dolnych rozciągające σ_{g2}

$$\sigma_{g1} = \frac{M_g}{J_z}(h - e) = \frac{2340 \cdot 10^3}{35,9 \cdot 10^4} \cdot (60 - 16,8) = 281,0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{g2} = \frac{M_g}{J_z}e = \frac{2340 \cdot 10^3}{35,9 \cdot 10^4} \cdot 16,8 = 110,0 \text{ MPa}$$

Największe napężenia od ścinania powstaną wzdłuż osi obojętnej.

Moment statyczny wynosi $S = 1 \cdot 4,32 \cdot 2,16 = 9,3 \text{ cm}^3$, a napężenie

$$\tau = \frac{TS}{bJ_z} = \frac{13300 \cdot 9,3 \cdot 10^3}{10 \cdot 35,9 \cdot 10^4} = 34,6 \text{ MPa}$$

Zastosujemy hipotezę największego wydłużenia względnego.

Napężenie zredukowane w górnych włóknach (ściskające) jest równe

$$\sigma_{red1} = \sigma_{g1} - \sigma_r = 281,0 - 18,2 = 262,8 \text{ MPa} < k_c = 300 \text{ MPa}$$

w dolnych włóknach (rozciągające)

$$\sigma_{red2} = \sigma_{g2} + \sigma_r = 110,0 + 18,2 = 128,2 \text{ MPa} > k_r = 100 \text{ MPa}$$

W osi obojętnej napężenia główne wynoszą

$$\sigma_{max} = \frac{1}{2}\sigma_r + \sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{2}\right)^2 + \tau^2} = 9,1 + \sqrt{9,1^2 + 34,6^2} \text{ MPa}$$

$$\sigma_{min} = \frac{1}{2}\sigma_r - \sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{2}\right)^2 + \tau^2} = 9,1 - \sqrt{9,1^2 + 34,6^2} \text{ MPa}$$

stąd

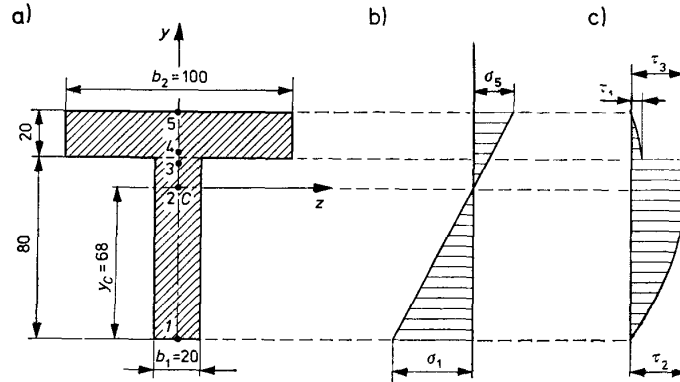
$$\sigma_{max} = 45,0 \text{ MPa}, \quad \sigma_{min} = -26,7 \text{ MPa}$$

Napężenie zredukowane jest równe

$$\sigma_{red3} = \sigma_{max} - \nu\sigma_{min} = 45,0 - 0,3(-26,7) = 53,0 < k_r = 100 \text{ MPa}$$

Ponieważ napężenia σ_{red2} są większe od dopuszczalnych, belka nie może pracować bezpiecznie.

Zadanie 9.15. Obliczyć wartość naprężeń zredukowanych w punktach 1-5 przekroju pręta pokazanego na rys. 9.11a, jeżeli w tym przekroju moment gnący wynosi $M = 5000 \text{ N} \cdot \text{m}$, a siła tnąca $T = 100 \text{ kN}$.



Rys. 9.11. Do zadania 9.15

Rozwiązanie. Współrzędna środka ciężkości przekroju wynosi $y_C = 6,8 \text{ cm}$, a moment bezwładności względem osi obojętnej $J_z = 400 \text{ cm}^4$. Naprężenia od zginania w odpowiednich punktach wynoszą

$$\sigma_1 = \frac{M}{J_z} y_C = \frac{5000 \cdot 10^3}{400 \cdot 10^4} \cdot 68 = 85,0 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \sigma_4 = \frac{5000 \cdot 10^3}{400 \cdot 10^4} \cdot 12 = 15,0 \text{ MPa}, \quad \sigma_5 = \frac{5000 \cdot 10^3}{400 \cdot 10^4} \cdot 32 = 40,0 \text{ MPa}$$

Wykres naprężeń od zginania przedstawiono na rys. 9.11b. Moment statyczny względem osi obojętnej części przekroju poniżej punktu 2 jest równy $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 6,8 \cdot 2 \cdot 6,8 = 46,3 \text{ cm}^3$, a części przekroju powyżej punktu 3 wynosi $S_2 = 2 \cdot 10 \cdot 2,2 = 44 \text{ cm}^3$.

Naprężenia tnące mają wartości

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_5 = 0, \quad \tau_2 = \frac{TS_1}{J_z b_1} = \frac{100000 \cdot 46,3 \cdot 10^3}{400 \cdot 10^4 \cdot 20} = 58,0 \text{ MPa}$$

$$\tau_3 = \frac{TS_2}{J_z b_1} = \frac{100000 \cdot 44 \cdot 10^3}{400 \cdot 10^4 \cdot 20} = 55,0 \text{ MPa}$$

$$\tau_4 = \frac{TS_2}{J_z b_2} = \frac{100000 \cdot 44 \cdot 10^3}{400 \cdot 10^4 \cdot 100} = 11,0 \text{ MPa}$$

Wykres naprężeń stycznych przedstawiono na rys. 9.11c. Naprężenia zredukowane obliczone według hipotezy Hubera wynoszą

$$\sigma_{1red} = \sigma_1 = 85,0 \text{ MPa}, \quad \sigma_{2red} = \sqrt{0 + 3\tau_2^2} = \sqrt{3}\tau_2 = 101,0 \text{ MPa}$$

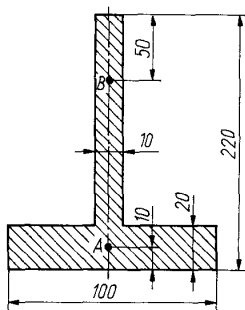
$$\sigma_{3red} = \sqrt{\sigma_3^2 + 3\tau_3^2} = 96,5 \text{ MPa}, \quad \sigma_{4red} = 24,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{5red} = \sigma_5 = 40,0 \text{ MPa}$$

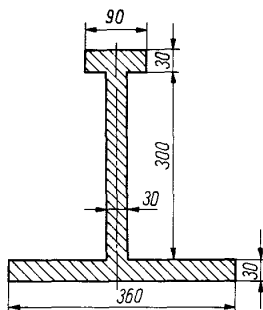
Zadanie 9.16. Obliczyć, jakie naprężenia styczne powstają w punktach A i B belki o przekroju poprzecznym przedstawionym na rys. 9.12, jeżeli siła tnąca w tym przekroju wynosi $T = 90 \text{ kN}$.

ODPOWIEDŹ:

$$\tau_A = 2,9 \text{ MPa}, \quad \tau_B = 31,1 \text{ MPa}$$



Rys. 9.12. Do zadania 9.16



Rys. 9.13. Do zadania 9.17

✓ **Zadanie 9.17.** Wyznaczyć maksymalne naprężenie styczne, jakie wystąpi w belce o przekroju podanym na rys. 9.13, jeżeli siła tnąca w tym przekroju wynosi $T = 100 \text{ kN}$.

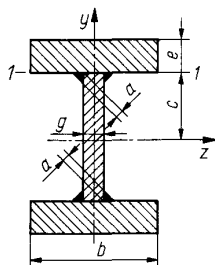
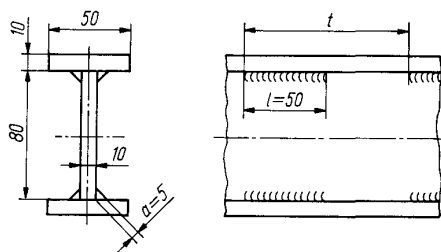
ODPOWIEDŹ:

$$\tau_{max} = 11,8 \text{ MPa}$$

Zadanie 9.18. Obliczyć wymaganą grubość a spoin ciągłych łączących środek z półkami dwuteownika (rys. 9.14), jeżeli siła tnąca w przekroju poprzecznym belki wynosi T , a naprężenie dopuszczalne na ścinanie spoin k_{ts} .

Rozwiązanie. Gdy podany na rysunku przekrój dwuteowy jest z litego materiału (nie z trzech płaskowników), wówczas naprężenia styczne w środku w miejscach położonych na granicy z półkami wynoszą (wzór Żurawskiego)

$$\tau_1 = \frac{TS_1}{gJ_z}$$

$$S_1 = be(c + 0.5e)$$
$$T_l = g\tau_l = \frac{TS_l}{J_z}$$
$$2ak_{ts} \geq T_1 = \frac{TS_1}{J_z}$$
$$a \geq \frac{TS_1}{2J_7 k_{TS}}$$

$$\frac{754}{164,97} = 4.57$$


Zadanie 9.19. Spawany dwuteownik (rys. 9.15a) jest obciążony siłą tnącą $T = 40 \text{ kN}$. Znając naprężenie dopuszczalne na ścinanie dla materiału spoiny $k_f = 80 \text{ MPa}$, obliczyć:

- a) minimalną grubość a_1 spoiny, jeżeli będą to spoiny ciągłe,
b) podziałkę t spoin, jeżeli ich grubość wynosi $a = 5$ mm, zaś długość $l = 50$ mm.

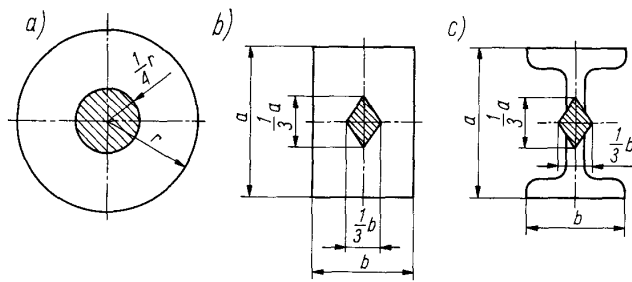
ODPOWIEDŹ:

$$a_1 = 2,3 \text{ mm}, \quad t = la/a_1 = 109 \text{ mm}$$

Zadanie 9.20. Wyznaczyć rdzenie przekroju dla słupów o przekroju kołowym, prostokątnym i dwuteowym.

Rozwiązanie. Aby w żadnym punkcie słupa o przekroju kołowym, ściskanego siłą P równoległą do osi słupa nie powstały naprężenia rozciągające, musi być spełniony warunek

$$\sigma = -\frac{P}{F} + \frac{M_g}{W} = -\frac{P}{\pi r^2} + \frac{Pe \cdot 4}{\pi r^3} = 0$$



Rys. 9.16. Do zadania 9.20

stąd mimośród $e = r/4$.

Podobnie dla prostokąta o bokach $a > b$

$$\sigma = -\frac{P}{F} + \frac{M_g}{W} = -\frac{P}{ab} + \frac{Pe \cdot 6}{ab^2} = 0$$

zatem $e = b/6$.

Kształt i wymiary rdzeni przekroju dla koła, prostokąta i dwuteownika podano na rys. 9.16.

Linie ugięcia belek

10

Wprowadzenie

Linie ugięcia belek wyznaczamy metodą analityczną przy zastosowaniu wzoru

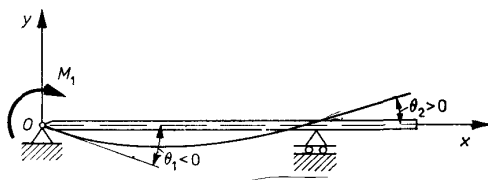
$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M_g \quad (10.1)$$

gdzie w celu skrócenia zapisu przyjmujemy $J = J_{z_c}$ (z_c – oś obojętna).

Po scałkowaniu powyższej zależności otrzymujemy wartości kątów nachyleńa stycznych do linii ugięcia w danym przekroju belki

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M_g}{EJ} dx \quad (10.2)$$

Reguły dotyczące znaków kątów ugięcia θ wyjaśnia rys. 10.1. Powtórne całkowanie wyrażenia (10.2) prowadzi do wzorów na ugięcie y belki.



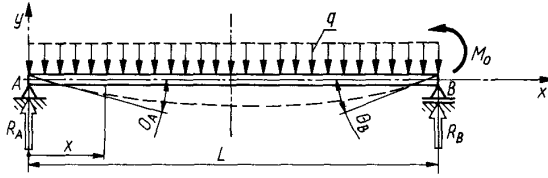
Rys. 10.1. Oznaczenia osi współrzędnych i kątów θ osi ugiętej pręta

Należy nadmienić, że wszystkie rozpatrywane belki (i ramy) mają na całej swej długości jednakową sztywność $EJ = \text{const}$.

Wyznaczanie przebiegu linii ugięcia belek metodą momentów wtórnych będzie omówione szczegółowo w zadaniu 10.12.

Zadanie 10.1. Dla belki o długości l podpartej na obu końcach i obciążonej na całej długości obciążeniem ciągłym q N/mm oraz momentem M_0 (rys. 10.2)

wyznaczyć równanie linii ugięcia, kąty ugięcia przy podporach oraz ugięcie w środku długości belki.



Rys. 10.2. Do zadania 10.1

Rozwiązanie. Równanie linii ugięcia jest określone wzorem (10.1). Moment gnący w przekroju określonym współrzędną x wynosi

$$M_x = R_A x - q \frac{x^2}{2}, \quad \text{gdzie} \quad R_A = q \frac{l}{2} + \frac{M_0}{l}$$

zatem

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{ql}{2} x + \frac{M_0}{l} x - \frac{qx^2}{2} \right)$$

stąd

$$EJ \frac{dy}{dx} = \frac{qlx^2}{4} + \frac{M_0 x^2}{l} - \frac{qx^3}{6} + C \quad (a)$$

$$EJy = \frac{qlx^3}{12} + \frac{M_0 x^3}{6l} - \frac{qx^4}{24} + Cx + D$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych

$$y_{(x=0)} = 0, \quad y_{(x=l)} = 0$$

stąd

$$D = 0, \quad C = -\frac{M_0 l}{6} - \frac{ql^3}{24}$$

Równanie linii ugięcia ma więc postać

$$EJy = \left(\frac{ql}{12} + \frac{M_0}{6l} \right) x^3 - \frac{q}{24} x^4 - \left(\frac{M_0 l}{6} + \frac{ql^3}{24} \right) x$$

Ugięcie f w połowie długości belki wynosi

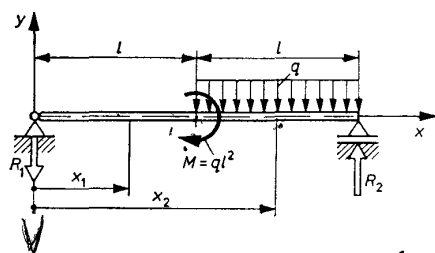
$$f = |y_{(x=\frac{l}{2})}| = \frac{M_0 l^2}{16EJ} + \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$$

Zauważmy, że wynik ten możemy odczytać bezpośrednio z tabl. 21.3, stosując metodę superpozycji (poz. 6 i 7 tablicy).

Wartości kątów ugięcia na podporach możemy otrzymać z równania (a) lub z tabl. 21.3, stosując metodę superpozycji

$$\theta_A = - \left(\frac{ql^3}{24EJ} + \frac{M_0 l}{6EJ} \right), \quad \theta_B = \frac{ql^3}{24EJ} + \frac{M_0 l}{3EJ}$$

Zadanie 10.2. Wyznaczyć kąt obrotu θ przekroju obciążonego momentem M dla belki pokazanej na rys. 10.3.



Rys. 10.3. Do zadania 10.2

Rozwiązanie. Reakcja $R_1 = \frac{1}{4}ql$.

Przedział 1 ($0 \leq x_1 \leq l$)

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M_{g1} = -R_1 x = -\frac{1}{4}qlx$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = C_1 - \frac{1}{8}qlx^2$$

$$EJy = D_1 + C_1 x - \frac{1}{24}qlx^3$$

Przedział 2 ($l \leq x_2 \leq 2l$)

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -R_1 x + M - \frac{1}{2}q(x-l)^2 = -\frac{1}{4}qlx + ql^2 - \frac{1}{2}q(x-l)^2$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = C_2 - \frac{1}{8}qlx^2 + ql^2 x - \frac{1}{6}q(x-l)^3$$

$$EJy = D_2 + C_2 x - \frac{1}{24}qlx^3 + \frac{1}{2}ql^2 x^2 - \frac{1}{24}q(x-l)^4$$

Warunki brzegowe mają postać

$$(y_1)_{(x=0)} = 0, \quad (y_2)_{(x=2l)} = 0$$

$$(y_1)_{(x=l)} = (y_2)_{(x=l)}, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1=l)} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_2=l)}$$

Po obliczeniach otrzymujemy wartości stałych całkowania

$$C_1 = -\frac{1}{16}ql^3, \quad D_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{17}{16}ql^3, \quad D_2 = \frac{1}{2}ql^4$$

Szukany kąt obrotu θ obliczamy z równania dla przedziału l dla $x_1 = l$

$$\theta = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1=l)} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{16}ql^3 - \frac{1}{8}ql^2\right) = -\frac{3}{16} \frac{ql^3}{EJ}$$

Zadanie 10.3. Rozwiązać zadanie 10.2, stosując metodę Clebscha.

Rozwiązanie. Współrzedną x odmierzamy – jak poprzednio – od jednego (lewego) końca belki, a wyrażenia na moment gnący otrzymujemy przez dodanie składników do wyrażen w poprzednim przedziale. Obliczenia podano w tabelce.

$EJ \frac{d^2y}{dx^2} =$	$-R_1 x$	$+M(x-l)^0 - q \frac{(x-l)^2}{2}$
$EJ \frac{dy}{dx} =$	$C - R_1 \frac{x^2}{2}$	$+M(x-l) - q \frac{(x-l)^3}{6}$
$EJ y =$	$D + Cx - R_1 \frac{x^3}{6}$	$+M \frac{(x-l)^2}{2} - q \frac{(x-l)^4}{24}$
$0 \leq x_1 \leq l$		
$l \leq x_2 \leq 2l$		

Z warunków brzegowych

$$y_{(x_1=0)} = 0 \quad \text{oraz} \quad y_{(x_2=2l)} = 0$$

wyznaczamy stałe całkowania

$$D = 0 \quad \text{oraz} \quad C = -\frac{1}{16}ql^3$$

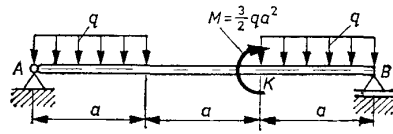
Kąt obrotu przekroju obciążonego momentem $M = ql^2$ wynosi

$$\theta = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x=l)} = \frac{1}{EJ} \left(C - R_1 \frac{l^2}{2}\right) = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{16}ql^3 - \frac{1}{4}ql \frac{l^2}{2}\right) = -\frac{3}{16} \frac{ql^3}{EJ}$$

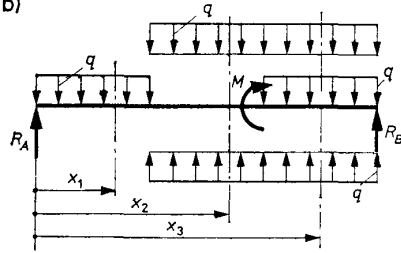
Zadanie 10.4. Wyznaczyć kąt obrotu przekroju K obciążonego momentem M dla belki pokazanej na rys. 10.4a.

Rozwiązanie. Reakcje wynoszą $R_A = \frac{1}{2}qa$, $R_B = \frac{3}{2}qa$. Stosujemy metodę

a)



b)



Rys. 10.4. Do zadania 10.4

$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} =$	$R_A x - \frac{1}{2} q x^2$	$+\frac{1}{2} q (x-a)^2$	$+M(x-2a)^0 - \frac{1}{2} q (x-2a)^2$
$EJ \frac{dy}{dx} =$	$C + \frac{1}{2} R_A x^2 - \frac{1}{6} q x^3$	$+\frac{1}{6} q (x-a)^3$	$+M(x-2a) - \frac{1}{6} q (x-2a)^3$
$EJ y =$	$D + Cx + \frac{1}{6} R_A x^3 - \frac{1}{24} q x^4$	$+\frac{1}{24} q (x-a)^4$	$+\frac{1}{2} M (x-2a)^2 - \frac{1}{24} q (x-2a)^4$
$0 \leq x_1 \leq a$			
$a \leq x_2 \leq 2a$			
		$2a \leq x_3 \leq 3a$	

Clebscha. Uzupełnienie obciążenia ciągłego przedstawiono na rys. 10.4b. Obliczenia podano w tabelce.

Z warunków brzegowych

$$y_{(x_1=0)} = 0, \quad y_{(x_3=3a)} = 0$$

obliczamy stałe całkowania

$$D = 0, \quad C = -\frac{1}{12} q a^3$$

Kąt obrotu przekroju K jest równy

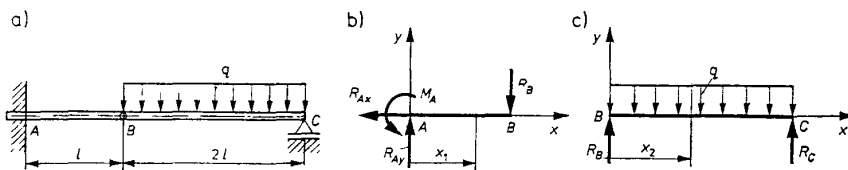
$$\theta_K = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x_2=2a)} = -\frac{q a^3}{4EJ}$$

Zadanie 10.5. Obliczyć ugięcie przegubu B belki pokazanej na rys. 10.5.

Rozwiązanie. Rozłączamy przegub, dzieląc belkę na dwa układy proste (rys. 10.5b i c) i obliczamy reakcje

$$R_{Ax} = 0, \quad R_{Ay} = R_B = R_C = ql, \quad M_A = ql^2$$

Ponieważ w przegubie B belka nie spełnia warunku ciągłości (kąty ugięcia końców obu odcinków belki mają w przegubie B różne wartości), nie możemy stosować metody Clebscha dla całej belki, lecz należy napisać równania linii ugięcia dla kolejnych przedziałów.



Rys. 10.5. Do zadania 10.5

Dla układu 1 (rys. 10.5b); $0 \leq x_1 \leq l$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M_{g1} = -M_A + R_{Ay} x = -ql^2 + qlx$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = C_1 - ql^2 x + \frac{1}{2} qlx^2$$

$$EJy = D_1 + C_1 x - \frac{1}{2} ql^2 x^2 + \frac{1}{6} qlx^3$$

Dla układu 2 (rys. 10.5c); $0 \leq x_2 \leq 2l$

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M_{g2} = R_B x - \frac{1}{2} qx^2 = qlx - \frac{1}{2} qx^2$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = C_2 + \frac{1}{2} qlx^2 - \frac{1}{6} qx^3$$

$$EJy = D_2 + C_2 x + \frac{1}{6} qlx^3 - \frac{1}{24} qx^4$$

Warunki brzegowe mają postać

$$y_{(x_1=0)} = 0, \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x_1=0)} = 0, \quad y_{(x_2=2l)} = 0, \quad y_{(x_1=l)} = y_{(x_2=0)}$$

stąd stałe całkowania wynoszą

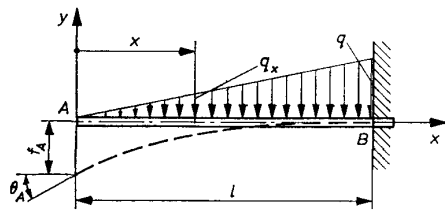
$$C_1 = 0, \quad D_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{1}{6} ql^3, \quad D_2 = -\frac{1}{3} ql^4$$

Ugięcie przegubu jest równe

$$f_B = y_{(x_2=0)} = -\frac{ql^4}{3EJ}$$

Przegub przemieści się do dołu.

Zadanie 10.6. Dla belki pokazanej na rys. 10.6 podać równanie linii ugięcia oraz strzałkę ugięcia.



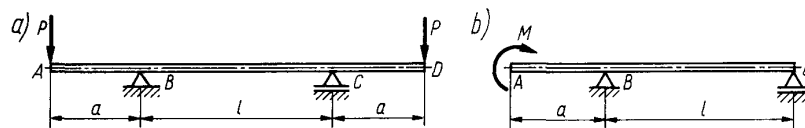
Rys. 10.6. Do zadania 10.6

ODPOWIEDŹ:

$$y = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{ql^4}{30} + \frac{ql^3}{24}x - \frac{qx^5}{120l} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} f_A &= -\frac{ql^4}{30EJ}, & \theta_A &= \frac{ql^3}{24EJ} \end{aligned} \right\}$$

Zadanie 10.7. Wyznaczyć ugięcia końca A belek przedstawionych na rys. 10.7a i b.



Rys. 10.7. Do zadania 10.7

ODPOWIEDŹ:

a) $f_A = \frac{Pa^2}{6EJ}(2a + 3l)$

b) $f_A = \frac{Ma}{6EJ}(3a + 2l)$

Zadanie 10.8. Obliczyć ugięcia punktów K belek podanych na rys. 10.8a÷d.

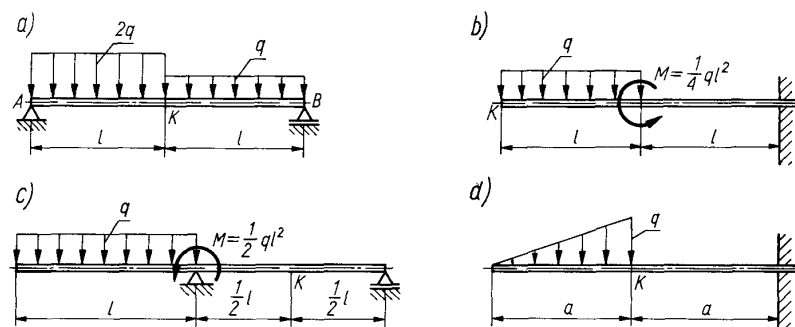
ODPOWIEDŹ:

a) $f_K = -\frac{5}{16} \frac{ql^4}{EJ}$, b) $f_K = -\frac{25}{12} \frac{ql^4}{EJ}$

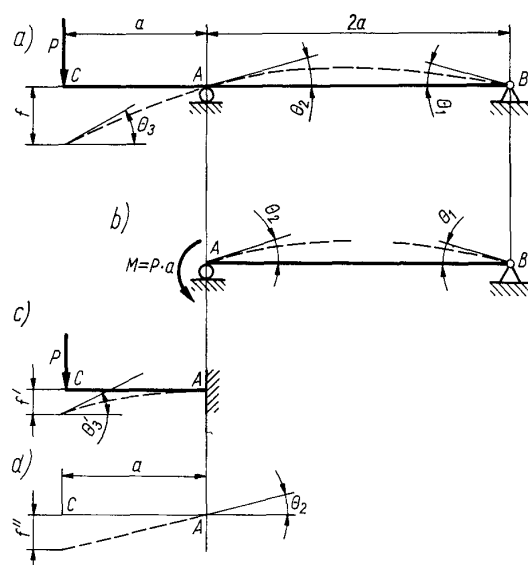
c) $f_K = \frac{ql^4}{16EJ}$, d) $f_K = -\frac{qa^4}{4EJ}$

Zadanie 10.9. Wyznaczyć kąty ugięcia i strzałkę ugięcia belki podpartej w dwóch punktach i obciążonej siłą P (rys. 10.9a).

Rozwiązanie. Zadanie można rozwiązać metodą superpozycji.



Rys. 10.8. Do zadania 10.8



Rys. 10.9. Do zadania 10.9

1) Odcinając (w myśli) część AC belki stwierdzimy, że pozostałą część AB belki można rozpatrzyć jako belkę na dwóch podporach, obciążoną na podporze A parą sił o momencie $M = Pa$ (rys. 10.9b). Z tablicy 21.3 mamy (poz. 7)

$$\theta_1 = \frac{M \cdot 2a}{6EJ} = \frac{Pa^2}{3EJ}$$

$$\theta_2 = \frac{M \cdot 2a}{3EJ} = \frac{2Pa^2}{3EJ}$$

2) Gdyby w przekroju nad podporą A belka była utwierdzona, wówczas lewa część belki przedstawiałaby się tak jak na rys. 10.9c, więc zgodnie z wzorami

z tabl. 21.3 (poz. 1) otrzymalibyśmy

$$f' = -\frac{Pa^3}{3EJ}, \quad \theta'_3 = \frac{Pa^2}{2EJ}$$

3) Gdyby lewy koniec belki nie był obciążony siłą P , natomiast kąt ugięcia na podporze A wynosiłby θ_2 (rys. 10.9d), wówczas ugięcie końca C belki byłoby równe

$$f'' = \theta_2 a = \frac{2Pa^3}{3EJ}$$

(odcinek AC belki obraca się tylko o kąt θ_2 , pozostając prostym).

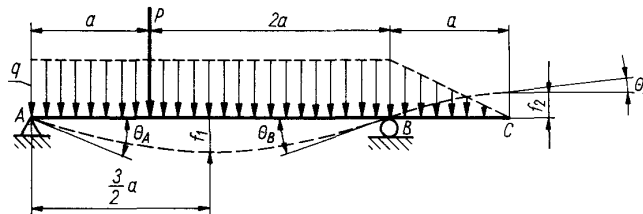
4) W rzeczywistości przypadki podane na rys. 10.9b, c i d występują równocześnie, zatem stan podany na rys. 10.9a jest superpozycją stanów przedstawionych na rys. 10.9b, c i d. Kąt ugięcia i strzałka ugięcia na końcu C belki wynoszą więc

$$f = f' + f'' = \frac{Pa^3}{3EJ} + \frac{2Pa^3}{3EJ} = \frac{Pa^3}{EJ}$$

$$\theta_3 = \theta'_3 + \theta_2 = \frac{Pa^2}{2EJ} + \frac{2Pa^2}{3EJ} = \frac{5Pa^2}{6EJ}$$

W rozpatrywanych zadaniach ustalenie znaku ugięć i kątów ugięcia w charakterystycznych punktach belek lub ram na ogół nie sprawia większych trudności, przeto w dalszej części tekstu znaki ugięć są często pomijane, przez co zawsze dodawane są (i odejmowane) ich bezwzględne wartości.

Zadanie 10.10. Wyznaczyć równanie różniczkowe linii ugięcia oraz obliczyć kąty ugięcia θ_A , θ_B , θ_C i ugięcia f_1 i f_2 belki przedstawionej na rys. 10.10.



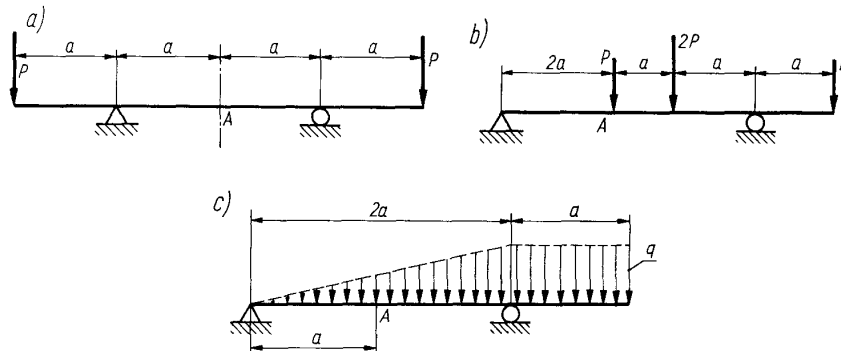
Rys. 10.10. Do zadania 10.10

ODPOWIEDŹ:

$$\theta_A = \frac{a^2}{EJ} \left(\frac{5}{9}P + \frac{25}{24}qa \right), \quad \theta_B = \frac{a^2}{EJ} \left(\frac{4}{9}P + \frac{23}{24}qa \right)$$

$$\theta_C = \frac{a^2}{EJ} \left(\frac{4}{9}P + \frac{11}{12}qa \right), \quad f_1 = \frac{23}{48} \frac{Pa^3}{EJ} + \frac{123}{128} \frac{qa^4}{EJ}, \quad f_2 = \frac{4}{9} \frac{Pa^3}{EJ} + \frac{111}{120} \frac{qa^4}{EJ}$$

Zadanie 10.11. Stosując zasadę superpozycji, wyznaczyć ugięcie w punkcie A każdej z belek podanych na rys. 10.11a, b i c.

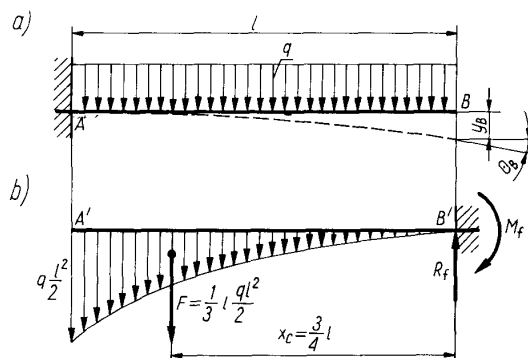


Rys. 10.11. Do zadania 10.11

ODPOWIEDŹ:

$$a) \quad f = \frac{Pa^3}{2EJ}, \quad b) \quad f = \frac{13 Pa^3}{6 EJ}, \quad c) \quad f = \frac{qa^4}{48EJ}$$

Zadanie 10.12. Stosując metodę momentów wtórnych (wykreślną-analityczną), wyznaczyć strzałkę i kąt ugięcia belki wspornikowej przedstawionej na rys. 10.12.



Rys. 10.12. Do zadania 10.12

Rozwiązanie. Główną trudność przy stosowaniu metody momentów wtórnych stanowi dobór takiego sposobu podparcia belki wtórnej (zastępczej, fikcyjnej), aby stałe całkowania występujące we wzorach na linie ugięcia (i kolejne pochodne) były tożsamościowo spełnione.

W szczególności belka wtórna musi być dobrana w taki sposób, aby w przekrojach belki rzeczywistej o znanych y i $dy/dx = \theta$ były spełnione zależności

$$\theta = \frac{T_f}{EJ}, \quad y = \frac{M_f}{EJ}$$

gdzie T_f oraz M_f – siła tnąca i moment gnący od obciążenia fikcyjnego (tj. wykresu momentów gnących) dla belki wtórnej.

W przypadku obliczanej belki wspornikowej wiemy, że w przekroju utwierdzenia (punkt A) $y = 0$ oraz $dy/dx = \theta = 0$, przeto dla belki wtórnej musi być w tym przekroju spełniony warunek

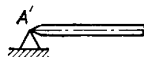
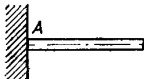
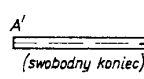
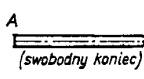
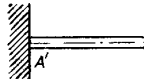
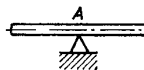
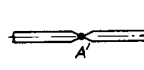
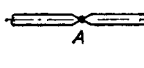
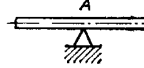
$$T_f = 0, \quad M_f = 0$$

z czego wynika wniosek, że w punkcie A' belka ta nie może być ani podparta, ani utwierdzona. Aby jednak belka wtórna znajdowała się w równowadze, musimy znaleźć taki przekrój, w którym możemy przyłożyć siły i momenty reakcyjne. Przekrojem tym może być tylko końcowy przekrój belki (punkt B' na rys. 10.12b), gdyż przyłożenie reakcji w jakimkolwiek innym punkcie powoduje nieciągłość wykresu fikcyjnych sił poprzecznych, co z kolei odpowiada gwałtownemu załamaniu linii ugięcia, którego w rzeczywistości nie ma.

Ponieważ w przekroju końcowym ugięcie y belki rzeczywistej i kąt nachylenia stycznej θ nie równa się zero, więc istotnie taki sposób utwierdzenia belki wtórnej $A'B'$ jest zgodny z warunkami zadania.

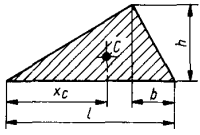
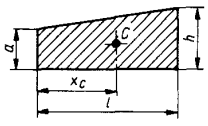
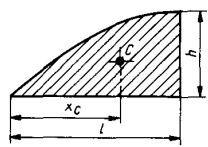
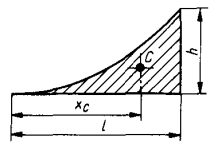
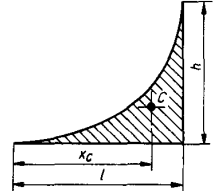
Sposoby doboru belek wtórnych dla kilku typowych belek rzeczywistych podano w tabl. 10.1.

Tablica 10.1. Sposoby podparcia belek wtórnych przy metodzie wykreślno-analitycznej

Lp.	Fragment belki rzeczywistej	Dane charakterystyczne	Wartości T_f i M_f	Odpowiadający fragment belki wtórnej
1		$y = 0$ $\theta \neq 0$	$M_f = 0$ $T_f \neq 0$	
2		$y = 0$ $\theta = 0$	$M_f = 0$ $T_f = 0$	 (swobodny koniec)
3	 (swobodny koniec)	$y \neq 0$ $\theta \neq 0$	$M_f \neq 0$ $T_f \neq 0$	
4		$y = 0$ $\theta \neq 0$	$M_f = 0$ $T_f \neq 0$	
5		$y \neq 0$ $\theta \neq 0$	$M_f \neq 0$ $T_f \neq 0$	

Ponieważ w metodzie momentów wtórnych wykres momentów gnących traktujemy jako obciążenie (fikcyjne) belki wtórnej, kilka danych dotyczących takich wykresów podano w tabl. 10.2.

Tablica 10.2. Powierzchnie pól i położenie środków ciężkości niektórych figur

Lp.	Figura	Oznaczenia	Pole F	Odległość środka ciężkości x_c
1	trojkąt		$F = \frac{lh}{2}$	$x_c = \frac{2l-b}{3}$
2	trapez		$F = \frac{a+b}{2}l$	$x_c = \frac{l}{3} \frac{a+2b}{a+b}$
3	pole ograniczone parabolą 2 stopnia		$F = \frac{2}{3}lh$	$x_c = \frac{5}{8}l$
4	pole ograniczone parabolą 2 stopnia		$F = \frac{1}{3}lh$	$x_c = \frac{3}{4}l$
5	pole ograniczone parabolą 3 stopnia		$F = \frac{1}{4}lh$	$x_c = \frac{4}{5}l$

Posługując się tabl. 10.2, obliczamy bezwzględne wartości fikcyjnego momentu gnącego i siły tnącej w przekroju B'

$$T_f = \frac{1}{3}l \frac{ql^2}{2} = \frac{ql^3}{6}$$

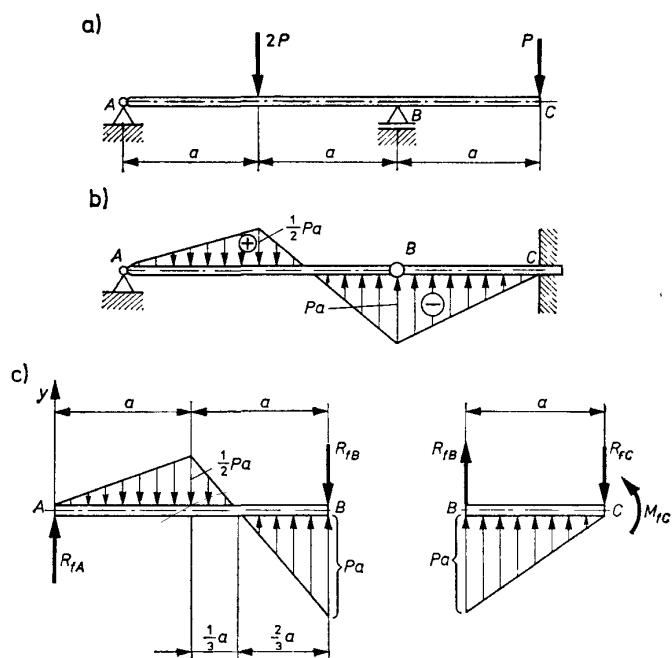
$$M_f = \frac{1}{3}l \frac{ql^2}{2} \frac{3}{4}l = \frac{ql^4}{8}$$

Kąt θ_B stycznej do linii ugięcia belki rzeczywistej w punkcie B oraz ugięcie y_B swobodnego końca belki, przy uwzględnieniu umowy co do znaków momentu gnącego i siły tnącej, wynosi

$$\theta_B = \frac{T_f}{EJ} = -\frac{ql^3}{6EJ}$$

$$y_B = \frac{M_f}{EJ} = -\frac{ql^4}{8EJ}$$

Zadanie 10.13. Wyznaczyć ugięcia i kąty ugięcia dla belki przedstawionej na rys. 10.13a, stosując metodę wykreślną-analityczną.



Rys. 10.13. Do zadania 10.13

Rozwiązanie. Zgodnie z pozycją 1, 4 oraz 3 tabl. 10.1 rysujemy belkę wtórną (rys. 10.13b) obciążoną polem wykresów momentów gnących o wartościach maksymalnych $\frac{1}{2}Pa$ oraz Pa . Belkę tę oswobodzamy z więzów. Otrzymu-

jemy układy pokazane na rys. 10.13c. Z warunków równowagi belki AB wyznaczamy reakcje fikcyjne na podporze A i w przegubie B

$$\begin{aligned}\Sigma M_A = & -R_{fB} \cdot 2a + Pa \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}a \left(a + \frac{1}{3}a + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}a \right) + \\ & - \frac{1}{2}Pa \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}a \left(a + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}a \right) - \frac{1}{2}Pa \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{3}a = 0\end{aligned}$$

stąd $R_{fB} = \frac{1}{6}Pa^2$

$$\Sigma P_y = R_{fA} - R_{fB} + Pa \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}Pa \cdot \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{3}a \right) = 0$$

stąd $R_{fA} = R_{fB} = \frac{1}{6}Pa^2$.

Z warunków równowagi belki wtórnej BC (rys. 10.13c) wynika, że

$$\Sigma P_y = R_{fB} + Pa \cdot \frac{1}{2}a - R_{fC} = 0$$

stąd

$$R_{fC} = \frac{2}{3}Pa^2$$

$$\Sigma M_C = M_{fC} - R_{fB}a - Pa \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{3}a = 0$$

stąd

$$M_{fC} = \frac{1}{2}Pa^3$$

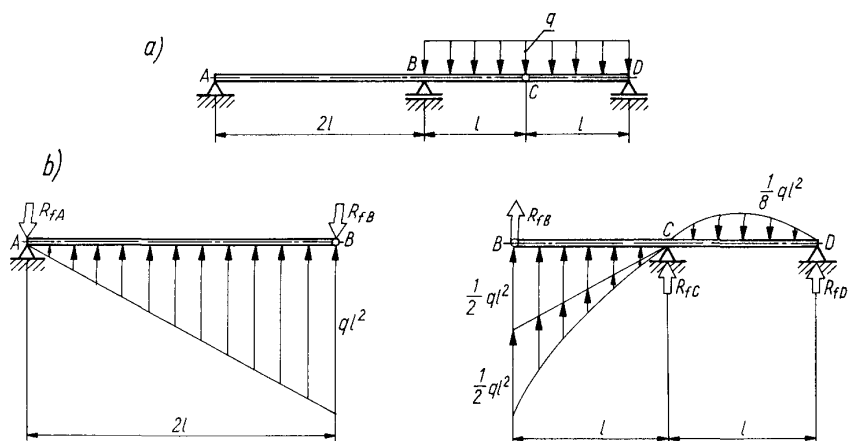
Zgodnie z poprzednio stosowanymi wzorami otrzymujemy

$$\theta_A = -\frac{R_{fA}}{EJ} = -\frac{Pa^2}{6EJ}, \quad \theta_B = |\theta_A|, \quad \theta_C = -\frac{R_{fC}}{EJ} = -\frac{2Pa^2}{3EJ}$$

$$f_C = -\frac{M_{fC}}{EJ} = -\frac{Pa^3}{2EJ}$$

Zadanie 10.14. Stosując metodę momentów wtórnych, wyznaczyć ugięcie przegubu C belki pokazanej na rys. 10.14a.

Rozwiązanie. Belkę fikcyjną (zastępczą) przedstawiono na rys. 10.14b. Obciążenie wtórne (wykres momentów gnących) dla odcinka BC jest wygodnie podzielić na pochodzące od rzeczywistej reakcji w przegubie C (górna część wykresów momentów gnących) oraz od obciążenia ciągłego (dolna część). Reakcja



Rys. 10.14. Do zadania 10.14

fikcyjna w punkcie B wynosi $R_{fB} = \frac{2}{3}ql^3$, a moment fikcyjny w punkcie C jest równy

$$M_{fC} = \frac{2}{3}ql^3l + \frac{1}{2}l \cdot \frac{1}{2}ql^2 \cdot \frac{2}{3}l + \frac{1}{3}l \cdot \frac{1}{2}ql^2 \cdot \frac{3}{4}l = \frac{23}{24}ql^4$$

Ugięcie przegubu C wynosi

$$f_C = \frac{M_{fC}}{EJ} = -\frac{23}{24} \frac{ql^4}{EJ}$$

Kąt obrotu przekroju w punkcie B jest równy

$$\theta_B = -\frac{R_{fB}}{EJ} = -\frac{2ql^3}{3EJ}$$

Wyboczenie

11

Wprowadzenie

W obliczeniach prętów prostych, ściskanych osiowo działającą siłą P , stosujemy następujący wzór

$$\sigma_c = \frac{P}{F} \leq \frac{\sigma_{kr}}{n} \quad (11.1)$$

gdzie: σ_{kr} – napężenie krytyczne na ściskanie (wyboczenie), n – współczynnik bezpieczeństwa.

Zmiana napężenia krytycznego σ_{kr} , przy którym następuje wyboczenie (utrata stateczności) pręta, jest pokazana na rys. 11.1. Na rysunku tym linia ciągła pogrubiona oznacza rzeczywisty, doświadczalny przebieg zmian naprężeń krytycznych σ_{kr} w funkcji smukłości s pręta wykonanego ze stali konstrukcyjnej.

Występująca tu *smukłość* s pręta jest określona wzorem

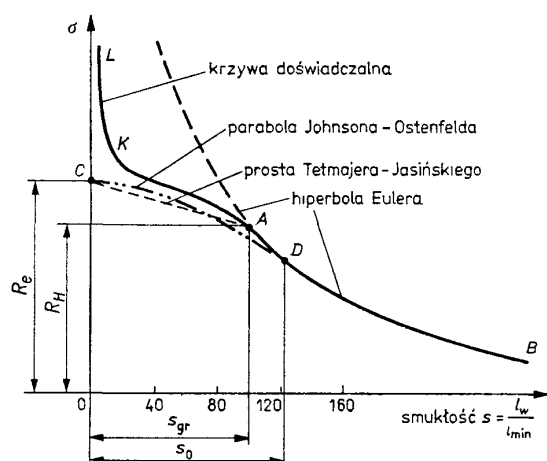
$$s = \frac{l_w}{i_{min}} \quad (11.2)$$

gdzie: l_w – długość wyboczeniowa pręta, i_{min} – minimalny promień bezwładności przekroju poprzecznego pręta, przy czym

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}} \quad (11.3)$$

Jak wynika z rys. 11.1 – dla smukłości s większych od pewnej granicznej wartości s_{gr} (lub s_0) – dość dobrym przybliżeniem krzywej doświadczalnej jest *hiperbola Eulera*, określona wzorem

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{s^2} \quad \text{dla } s \geq s_{gr} \text{ (lub } s_0) \quad (11.4)$$



Rys. 11.1. Naprężenia krytyczne σ_{kr} w zależności od smukłości s przy wyboczeniu prętów wykonanych ze stali konstrukcyjnych

Dla smukłości mniejszych od s_{gr} (lub s_0) stosuje się jedną z dwóch metod:

a) metodę *Tetmajera-Jasińskiego*, określającą naprężenia krytyczne σ_{kr} za pomocą prostej (oznaczonej AC na rys. 11.1)

$$\sigma_{kr} = R_e - \frac{(R_e - R_H)s}{s_{gr}} \quad \text{dla } s \leq s_{gr} \quad (11.5)$$

gdzie

$$s_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} \quad (11.6)$$

b) metodę *Johnsona-Ostenfelda*, określającą naprężenie σ_{kr} za pomocą paraboli CD (rys. 11.1)

$$\sigma_{kr} = R_e - \frac{R_e^2 s^2}{4E\pi^2} \quad \text{dla } s \leq s_0 \quad (11.7)$$

gdzie smukłość s_0 oblicza się ze wzoru

$$s_0 = \pi \sqrt{\frac{2E}{R_e}} \quad (11.8)$$

W powyższych wzorach R_e oznacza granicę plastyczności, a R_H – granicę proporcjonalności.

Podany wyżej zakres wzorów wystarcza do przeprowadzenia obliczeń wstępnych, natomiast obliczenia sprawdzające ustrojów pracujących na wyboczenie należy przeprowadzać przy zastosowaniu aktualnie obowiązujących w tym zakresie norm, np. PN-90/B-03200.

Zadanie 11.1. Stalowy pręt o długości $l = 120$ cm, na obu końcach połączony przegubowo, ma przekrój poprzeczny w kształcie prostokąta o bokach 50×60 mm. Obliczyć dopuszczalną wartość siły ściskającej pręt, jeżeli granica plastyczności $R_e = 240$ MPa, granica proporcjonalności $R_H = 200$ MPa, moduł Younga $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, współczynnik bezpieczeństwa $n = 2$.

Rozwiązanie. Pole przekroju poprzecznego wynosi $F = 30$ cm², a minimalny moment bezwładności

$$J_{min} = \frac{6 \cdot 5^3}{12} = 62,5 \text{ cm}^4$$

a więc promień bezwładności jest równy

$$i = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}} = \sqrt{\frac{62,5}{30}} = 1,45 \text{ cm}$$

Ponieważ $l_w = l = 120$ cm, więc smukłość

$$s = \frac{l_w}{i} = \frac{120}{1,45} = 83,2$$

Smukłość graniczna obliczona dla takiej właśnie stali (wzór (11.6)) wynosi, według metody Tetmajera, $s_{gr} = 100$. Ponieważ smukłość obliczanego pręta $s = 83,2 < s_{gr} = 100$, do obliczenia naprężeń krytycznych σ_{kr} nie możemy stosować wzoru Eulera (11.4), lecz np. wzór Tetmajera (11.5)

$$\sigma_{kr} = R_e - \frac{(R_e - R_H)s}{s_{gr}} = 240 - \frac{(240 - 200)s}{100} = 240 - 0,4s$$

Po podstawieniu obliczonej smukłości $s = 83,2$ do powyższego wzoru otrzymamy $\sigma_{kr} = 206,5$ MPa, zatem dopuszczalna wartość siły P (ze wzoru (11.1)) ma wartość

$$P = \frac{\sigma_{kr} F}{n} = \frac{206,5 \cdot 3000}{2} = 308\,000 \text{ N} = 308 \text{ kN}$$

Zadanie 11.2. Pręt o przekroju kołowym i długości $l = 100$ cm jest wykonany z duralu PA7 i obciążony siłą osiową $P = 1$ MN (≈ 100 ton), ze współczynnikiem bezpieczeństwa $n = 3$. Obliczyć konieczną średnicę pręta, jeżeli jest on utwierdzony na obu końcach. Dane materiałowe: $E = 0,73 \cdot 10^5$ MPa, $R_e = 300$ MPa, $R_H = 250$ MPa.

Rozwiązanie. Rozpatrywany pręt jest utwierdzony na obu końcach, przeto jego długość wyboczeniowa $l_w = \frac{1}{2}l = 50$ mm. Dla przekroju kołowego mamy

$$J_{min} = J = \frac{1}{64}\pi d^4, \quad F = \frac{1}{4}\pi d^2$$

zatem

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J}{F}} = \frac{d}{4}$$

Dla duralu PA7 smukłość graniczną obliczamy ze wzoru (11.6)

$$s_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} = \pi \sqrt{\frac{0,73 \cdot 10^5}{250}} = 53,5$$

Siła odpowiadająca tej, granicznej, smukłości (ze wzoru (11.1)) wynosi

$$P_{gr} = \frac{F \sigma_{gr}}{n} = \frac{\pi d^2 R_H}{4n} = \frac{\pi d^2 \cdot 250}{4 \cdot 3} = 1 \cdot 10^6 \text{ N}$$

a wówczas wymagana średnica pręta $d = 125 \text{ mm}$ oraz $i_{min} = 31,2 \text{ mm}$, zatem smukłość

$$s = \frac{l_w}{i_{min}} = \frac{500}{31,2} = 16 < s_{gr} = 53,5$$

Wynika stąd, że naprężenia σ_{kr} należy obliczać nie ze wzoru Eulera, lecz np. ze wzoru Tetmajera, a wówczas

$$\sigma_{kr} = R_e - \frac{(R_e - R_H)s}{s_{gr}} = 300 - \frac{(300 - 250)s}{53,5} = 300 - 0,94s$$

Po zastosowaniu wzoru (11.1) otrzymujemy warunek

$$\sigma_{kr} = \frac{Pn}{F} = \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 4}{\pi d^2}$$

W wyniku porównania otrzymanych zależności

$$300 - 0,94s = \frac{3,86 \cdot 10^6}{d^2}$$

po podstawieniu

$$s = \frac{l_w}{i_{min}} = \frac{5000 \cdot 4}{d}$$

otrzymujemy wymaganą średnicę pręta $d = 113 \text{ mm}$.

Zadanie 11.3. Obliczyć dopuszczalną wartość siły ściskającej pręt, który jest jednostronnie utwierdzony (drugi koniec swobodny). Przekrój poprzeczny pręta jest pokazany na rys. 11.2. Pręt jest wykonany ze stali o danych materiałowych jak w zadaniu 11.1. Długość pręta wynosi $l = 150 \text{ mm}$, współczynnik bezpieczeństwa $n = 3$.

Rozwiązanie. Obliczamy wielkości geometryczne przekroju poprzecznego

$$z_c = 6,62 \text{ mm}, \quad y_c = 0, \quad F = 260 \text{ cm}^2, \quad J_{z_c} = 7670 \text{ mm}^4, \quad J_{y_c} = 4048 \text{ mm}^4$$

Mniejszą wartość ma moment bezwładności $J_{y_c} = J_{min}$, więc wyboczenie pręta ma postać wygięcia względem osi y_c . Ponieważ promień bezwładności $i = 3,95 \text{ mm}$, dla jednostronnego utwierdzenia $l_w = 2l = 300 \text{ mm}$, smukłość pręta wynosi

$$s = \frac{l_w}{i} = \frac{300}{3,95} = 75,9 < s_{gr}$$

Dla danej stali smukłość graniczna obliczona w zadaniu 11.1 jest równa

$$s_{gr} = 100 > s = 75,9$$

zatem naprężenia krytyczne obliczamy ze wzoru Tetmajera (wzór ten wynika ze wzoru (11.5) po podstawieniu konkretnych wartości)

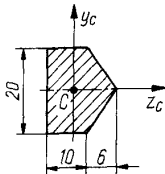
$$\sigma_{kr} = 240 - 0,4s = 240 - 0,4 \cdot 75,9 = 209,5 \text{ MPa}$$

Siłę dopuszczalną obliczamy ze wzoru

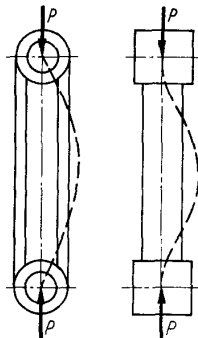
$$P_{dop} = \frac{\sigma_{kr} F}{n} = \frac{209,5 \cdot 260}{2} = 27 \text{ kN}$$

Stosując metodę Johnsona-Ostenfelda, wzór (11.8) i (11.7), znajdujemy $s_0 = 144$ oraz $\sigma_{kr} = 212 \text{ MPa}$.

Jak widzimy, wyniki obliczeń przy zastosowaniu obu metod niewiele różnią się (w danym przypadku o około 1%), stąd na ogół stosuje się prostszą w obliczeniach metodę Tetmajera.



Rys. 11.2. Do zadania 11.3



Rys. 11.3. Do zadania 11.4

Zadanie 11.4. Stalowy korbówód (rys. 11.3) ma przekrój poprzeczny jak na rys. 7.5b. Długość korbowodu $l = 150 \text{ cm}$; dane materiałowe dla stali są podane w zadaniu 11.1. Obliczyć siłę krytyczną.

Rozwiązanie. Rozpatrujemy dwie możliwości wyboczenia korbowodu.
Dla wyboczenia względem osi z ($l_w = l$)

$$J_z = 234,7 \text{ cm}^4, \quad i_z = 2,71 \text{ cm}, \quad s = \frac{l}{i_z} = \frac{150}{2,71} = 55,3$$

a dla wyboczenia względem osi y ($l_w = \frac{1}{2}l$)

$$J_y = 74,7 \text{ cm}^4, \quad i_y = 1,53 \text{ cm}, \quad s = \frac{\frac{1}{2}l}{i_y} = \frac{75}{1,53} = 49,0$$

Bardziej niebezpieczny jest przypadek większej smukłości, więc po podstawieniu jej do wzoru Tetmajera (dla $s < s_{gr} = 100$) otrzymamy

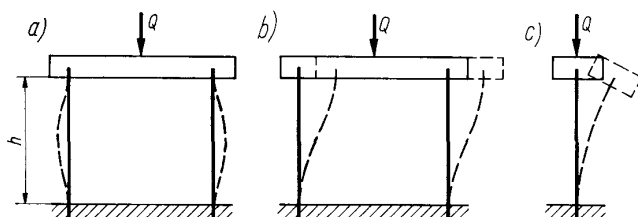
$$\sigma_{kr} = 240 - 0,4s = 218 \text{ MPa}$$

Siła krytyczna wynosi

$$P_{kr} = \sigma_{kr} F = 218 \cdot 3200 = 697 \text{ kN}$$

Zadanie 11.5. Do dwóch utwierdzonych w podłożu okrągłych prętów stalowych przyspawano płytę i obciążono w osi symetrii siłą Q (rys 11.4).

Obliczyć największą dopuszczalną wartość tej siły. Dane: średnica prętów $d = 20 \text{ mm}$, długość prętów $h = 400 \text{ mm}$, $R_H = 200 \text{ MPa}$, $R_e = 240 \text{ MPa}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $n = 3$.



Rys. 11.4. Do zadania 11.5

Rozwiązanie. Dla okrągłego pręta otrzymujemy

$$J = \frac{\pi d^4}{64} = 7850 \text{ mm}^4, \quad i = \frac{d}{4} = 5,0 \text{ mm}$$

Możliwe są trzy postacie wyboczenia przedstawione na rys. 11.4a, b i c. Długości wyboczeniowe wynoszą odpowiednio

$$\text{a) } l_w = \frac{1}{2}h, \quad \text{b) } l_w = h, \quad \text{c) } l_w = 2h$$

Siła obciążająca jest najmniejszą z trzech dopuszczalnych sił dla trzech postaci wyboczenia; najmniejsza siła odpowiada największej smukłości, a przy tym samym promieniu bezwładności największej długości wyboczeniowej $l_w = 2h = 800$ mm.

Smukłość wynosi

$$s = \frac{l_w}{i} = \frac{800}{5} = 160 > s_{gr} = 100$$

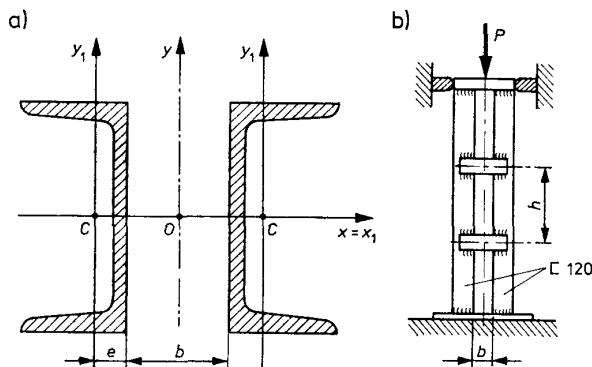
Ze wzoru Eulera (11.4), po podstawieniu zależności (11.2) oraz konkretnych wartości liczbowych, wynika

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{s^2} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{l_w^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5^2}{800^2} = 77,5 \text{ MPa}$$

Dopuszczalna wartość siły Q (rys. 11.4c) wynosi

$$Q = 2 \frac{\sigma_{kr} F}{n} = 2 \frac{77,5 \cdot \pi \cdot 20^2}{3 \cdot 4} = 16,1 \text{ kN}$$

Zadanie 11.6. Słup o wysokości $H = 2,5$ m, utwierdzony u dołu i zamocowany przegubowo u góry, jest wykonany z dwóch ceowników stalowych $\square 120$, jak na rys. 11.5. Obliczyć optymalne rozstawienie b ceowników, dopuszczalną siłę ściskającą P oraz największą dopuszczalną odległość h między przewiązkami łączącymi ceowniki. Dane o ceowniku $\square 120$: $F = 17,0 \text{ cm}^2$, $e = 1,60 \text{ cm}$, $J_{x1} = 364 \text{ cm}^4$, $J_{y1} = 43,2 \text{ cm}^4$, $i_{min} = 1,59 \text{ cm}$.



Rys. 11.5. Do zadania 11.6

Rozwiązanie. Rozstawienie ceowników musi być tak dobrane, aby momenty bezwładności względem osi x i y były równe

$$J_x = 2J_{x1} = J_y = 2 \left[J_{y1} + F \left(e + \frac{1}{2}b \right)^2 \right]$$

$$2 \cdot 364 = 2 \left[43,2 + 17 \left(1,6 + \frac{1}{2}b \right)^2 \right]$$

stąd $b = 5,5$ cm.

Długość wyboczeniowa słupa $l_w = 0,7H = 0,7 \cdot 250 = 175$ cm.

$$i = \sqrt{\frac{J_x}{2F}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 364}{2 \cdot 17}} = 4,63, \quad s = \frac{l_w}{i} = \frac{175}{4,63} = 38 < s_{gr} = 100$$

Stosując wzór Tetmajera (dla stali jak w zadaniu 11.1), otrzymujemy

$$\sigma_{kr} = 240 - 0,4s = 225 \text{ MPa}$$

Siła dopuszczalna jest równa

$$P_{dop} = \frac{P_{kr}}{n} = \frac{\sigma_{kr} F}{n} = \frac{225 \cdot 2 \cdot 1700}{2} = 382,5 \text{ kN}$$

Odległość między przewiązkami należy tak ustalić, aby pewność pracy na wyboczenie pojedynczego ceownika między przewiązkami była nie mniejsza niż całego słupa, tzn. smukłość pojedynczego ceownika powinna wynosić

$$s_1 = \frac{h}{i_{min}} \leq s = 38$$

stąd

$$h \leq s i_{min} = 38 \cdot 1,59 = 60,5 \text{ cm}$$

Zadanie 11.7. Obliczyć dopuszczalną siłę ściskającą obustronnie utwierdzony pręt o długości 3 m. Przekrój pręta podano na rys. 7.7a; $r = 40$ mm. Pręt wykonano ze stali o danych materiałowych jak w zadaniu 11.1. Współczynnik bezpieczeństwa $n = 2$.

ODPOWIEDŹ:

$$P_{dop} = 1560 \text{ kN}$$

Zadanie 11.8. Określić wartość siły krytycznej dla dwuprzegubowego pręta o długości $l = 120$ cm. Przekrój pręta podano na rys. 7.7d; $r = 10$ mm. Pręt wykonano z aluminium o danych materiałowych jak w zadaniu 11.2.

ODPOWIEDŹ:

$$P_{kr} = 16 \text{ kN}$$

Belki i ramy statycznie niewyznaczalne

12

Wprowadzenie

Wyznaczanie reakcji podporowych oraz przebiegu linii ugięcia belek lub ram statycznie niewyznaczalnych można przeprowadzać przy zastosowaniu *metody superpozycji* oraz warunków wynikających z odkształceń. Możemy wówczas wykorzystać poznane dotychczas zależności dotyczące układów statycznie wyznaczalnych.

Rozwiązania układów statycznie niewyznaczalnych można również uzyskać przez zastosowanie metody trzech momentów, omówionej szczegółowo w zadaniu 12.6, lub też za pomocą metod energetycznych (rozdz. 16 i 17).

Zadanie 12.1. Dla belki podanej na rys. 12.1a wyznaczyć reakcje podporowe.

Rozwiązanie. Na rysunku 12.1b przedstawiono reakcje podporowe belki po uwolnieniu jej z więzów. Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny i stanowi superpozycję dwóch statycznie wyznaczalnych stanów, podanych na rys. 12.1c i d.

Z tablicy 21.3 (poz. 1) odczytujemy:

– dla belki pokazanej na rys. 12.1c

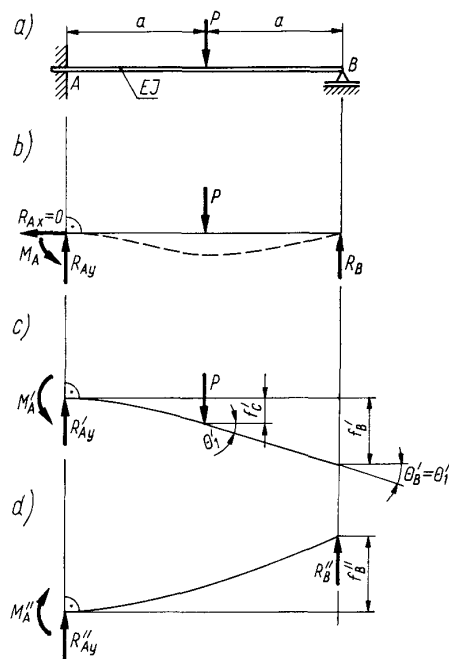
$$f'_C = \frac{Pa^3}{3EJ}, \quad \theta'_1 = \frac{Pa^2}{2EJ}$$

zatem

$$f'_B = f'_C + \theta'_1 a = \frac{5Pa^3}{6EJ}$$

– dla belki przedstawionej na rys. 12.1d

$$f''_B = \frac{R''_B(2a)^3}{3EJ} = \frac{R''_B \cdot 8a^3}{3EJ}$$



Rys. 12.1. Do zadania 12.1

Ugięcie na podporze B w stanie zasadniczym (rys. 12.1b) – równe zero – jest superpozycją stanu z rys. c oraz z rys. d, zatem

$$f_B = f'_B - f''_B = \frac{5Pa^3}{6EJ} - \frac{R''_B \cdot 8a^3}{3EJ} = 0$$

stąd

$$R''_B = \frac{5P}{16}$$

Rozpatrywaną belkę można również rozwiązać, przyjmując jako wielkość statycznie niewyznaczalną moment M_A (zamiast reakcji R_B). Układ traktujemy wówczas jako superpozycję belki swobodnie podpartej na końcach i obciążonej:

- raz siłą P , działającą w środku belki,
- a drugi raz obciążoną na podporze A momentem M_A .

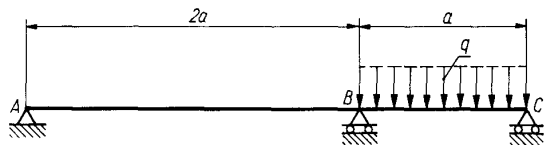
Z warunku utwierdzenia końca A wynika, że kąt ugięcia od momentu M_A (z tabl. 21.3, poz. 7) musi być równy kątowi ugięcia od siły P (tabl. 21.3, poz. 4)

$$\frac{M_A \cdot 2a}{3EJ} = \frac{P(2a)^2}{16EJ}$$

stąd

$$M_A = \frac{3}{8}Pa$$

Zadanie 12.2. Stosując zasadę superpozycji, wyznaczyć reakcje podporowe belki pokazanej na rys. 12.2.



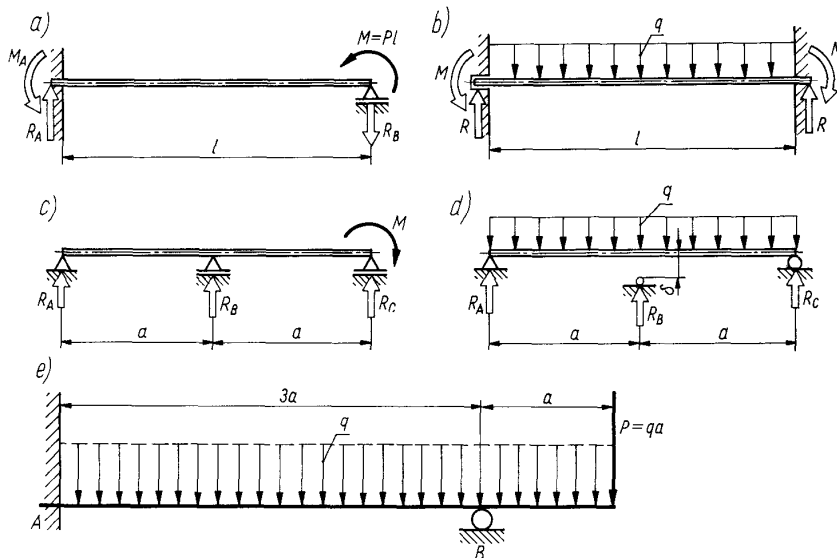
Rys. 12.2. Do zadania 12.2

Wskazówka: Usunąć podporę A lub C, a następnie wyznaczyć reakcję tej podpory z warunku, że ugięcie belki w tym punkcie jest w rzeczywistości równe zero.

ODPOWIEDŹ:

$$R_A = -\frac{qa}{48}, \quad R_B = \frac{9}{16}qa, \quad R_C = \frac{11}{24}qa$$

Zadanie 12.3. Stosując metodę superpozycji, wyznaczyć wartości reakcji oraz wykonać wykresy momentów gnących dla belek przedstawionych na rys. 12.3a÷e.



Rys. 12.3. Do zadania 12.3

ODPOWIEDŹ:

a) $M_A = \frac{1}{2}M, \quad R_A = R_B = \frac{3}{2}P$

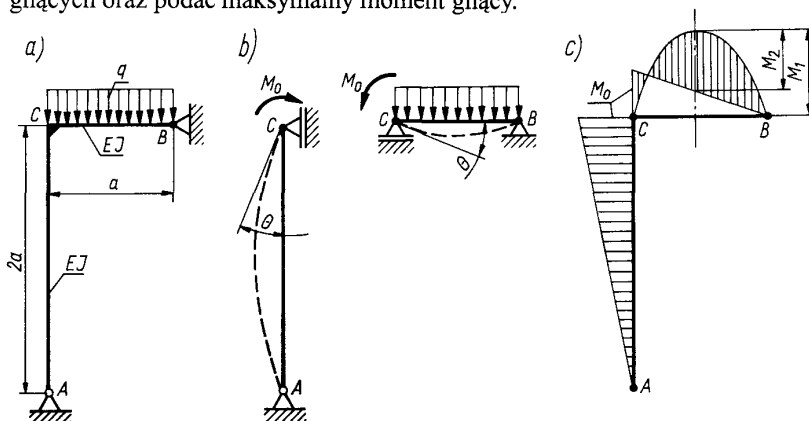
b) $M = \frac{1}{12}ql^2, \quad R = \frac{1}{2}ql$

$$c) \quad R_A = \frac{M}{4a}, \quad R_B = -\frac{3M}{2a}, \quad R_C = \frac{5M}{4a}$$

$$d) \quad R_A = R_C = \frac{3}{8}qa + \frac{3EJ\delta}{a^3}, \quad R_B = \frac{5}{4}qa - \frac{6EJ\delta}{a^3}$$

$$e) \quad M_A = -\frac{3qa^2}{8}$$

Zadanie 12.4. Dla ramy pokazanej na rys. 12.4 wykonać wykres momentów gnących oraz podać maksymalny moment gnący.



Rys. 12.4. Do zadania 12.4

Rozwiązanie. Moment gnący występujący w sztywnym węźle C ramy oznaczamy M_0 i obie części ramy traktujemy jak belki swobodnie podparte, obciążone w końcach C momentem M_0 (rys. 12.4b). Przyjmujemy, że dla małych odkształceń przemieszczenie węzła C jest pomijalnie małe, a z zasady ciągłości odkształceń (sztywny węzeł) wynika, że kąt obrotu węzła C jest jednakowy dla obu prętów.

Zgodnie ze wzorami z tabl. 21.3 kąt ugięcia θ na podporze C dla belki CB wynosi

$$\theta = \frac{qa^3}{24EJ} - \frac{M_0a}{3EJ}$$

a dla belki AC

$$\theta = \frac{M_0 \cdot 2a}{3EJ}$$

Z przyrównania tych wzorów otrzymujemy

$$M_0 = \frac{qa^2}{24}$$

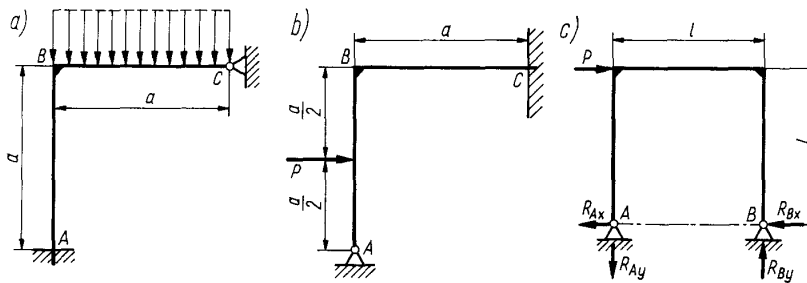
Wykres momentów gnących dla ramy podano na rys. 12.4c. Oznaczenia na wykresie mają następujące wartości

$$M_1 = \frac{qa^2}{8}, \quad M_2 = M_1 - 0,5M_0 = \frac{5}{48}qa^2$$

Maksymalna wartość M_{max} momentu gnącego dla $x_m = \frac{11}{24}a$ (x jest odmierzone od końca B pręta BC , x_m obliczone z warunku $T = 0$) wynosi

$$M_{max} = \frac{5,092}{48}qa^2$$

Zadanie 12.5. Wykonać wykres momentów gnących dla ram przedstawionych na rys. 12.5a, b i c. Sztywność zginania wszystkich prętów ramy jest – jak zwykle – jednakowa i równa EJ .



Rys. 12.5. Do zadania 12.5

ODPOWIEDŹ.

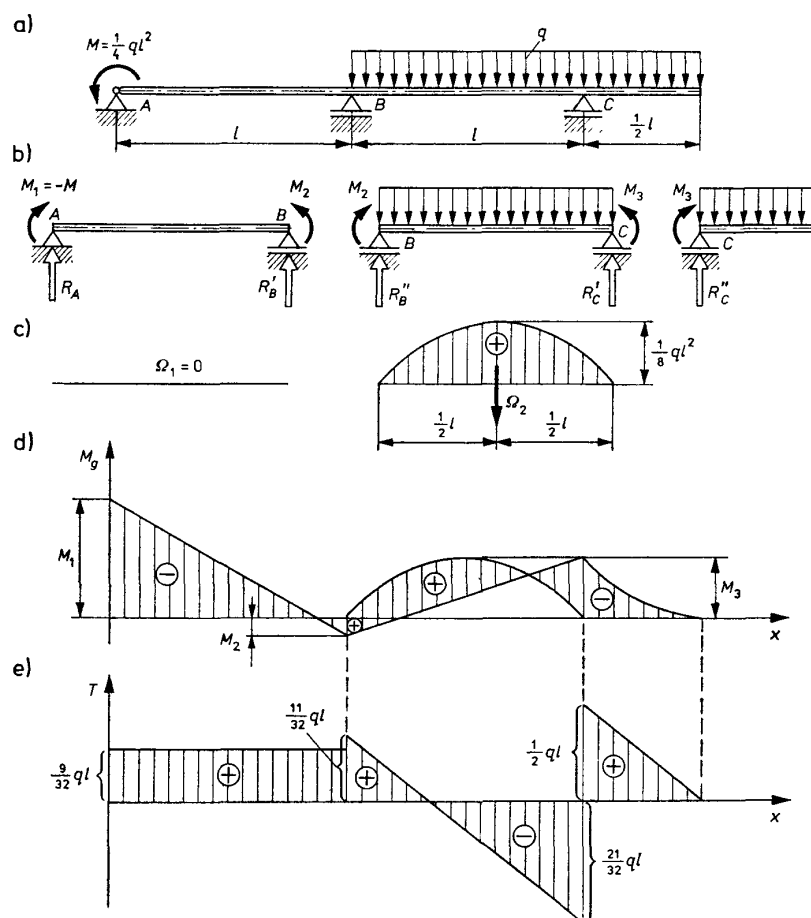
$$a) \quad M_A = \frac{qa^2}{28}, \quad M_B = \frac{qa^2}{14}$$

$$b) \quad M_B = -\frac{3}{28}Pa, \quad M_C = \frac{3}{56}Pa, \quad M_{max} = \frac{11}{56}Pa$$

$$c) \quad R_{Ax} = R_{Bx} = \frac{1}{2}P, \quad R_{Ay} = R_{By} = P$$

Zadanie 12.6. Dla belki przedstawionej na rys. 12.6a wykonać wykresy sił wewnętrznych.

Rozwiązanie. Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne; brakuje równanie uzyskamy, stosując równanie trzech momentów. Podział belki na dwa przęsła i wysięgnik (który nie jest przęsłem) przedstawiono na rys. 12.6b. Moment M działający na podporze A można traktować jako moment podporowy



Rys. 12.6. Do zadania 12.6

$M_1 = -M = -\frac{1}{4}ql^2$. Moment podporowy M_3 można obliczyć z równania statyki, czyli z sumy momentów względem podpory C

$$M_3 + \frac{1}{2}ql \cdot \frac{1}{4}l = 0$$

stąd

$$M_3 = -\frac{1}{8}ql^2$$

Wykres momentów gnących od obciążeń zewnętrznych jest przedstawiony na rys. 12.6c. Pole wykresu jest równe

$$\Omega_2 = \frac{2}{3}l \cdot \frac{1}{8}ql^2 = \frac{1}{12}ql^3$$

Równanie trzech momentów ma postać

$$M_1 l + 2M_2(l + l) + M_3 l = 0 - 6 \frac{\Omega_2 \cdot \frac{1}{2} l}{l}$$

skąd, po podstawieniu obliczonych wielkości, otrzymujemy wartość momentu podporowego

$$M_2 = +\frac{1}{32} q l^2$$

Wykres momentów gnących przedstawiono na rys. 12.6d.

Z równań równowagi dla każdego przęsła i wysięgnika (rys. 12.6b) obliczamy reakcje podporowe

$$R_A = \frac{9}{32} q l, \quad R'_B = \frac{9}{32} q l, \quad R''_B = \frac{11}{32} q l, \quad R'_C = \frac{21}{32} q l, \quad R''_C = \frac{1}{2} q l$$

Całkowite reakcje podporowe wynoszą

$$R_B = R'_B + R''_B = \frac{1}{16} q l, \quad R_C = R'_C + R''_C = \frac{37}{32} q l$$

Wykres sił tnących dla belki przedstawiono na rys. 12.6e.

Zadanie 12.7. Obliczyć reakcje podpór oraz wykonać wykresy sił wewnętrznych dla belki przedstawionej na rys. 12.7.

Rozwiązanie. Zadanie jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalne. Podział belki na trzy przęsła przedstawiono na rys. 12.7b, a wykresy momentów gnących od obciążeń zewnętrznych na rys. 12.7c. Pola wykresów M_g wynoszą

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} Pa = \frac{1}{2} Pa^2, \quad \Omega_3 = \frac{1}{2} (a + 3a) Pa = 2Pa^2$$

Równanie trzech momentów dla przęsła lewego i środkowego ma postać

$$M_1 \cdot 2a + 2M_2(2a + 2a) + M_3 \cdot 2a = -6 \frac{\Omega_1 a}{2a} - 0$$

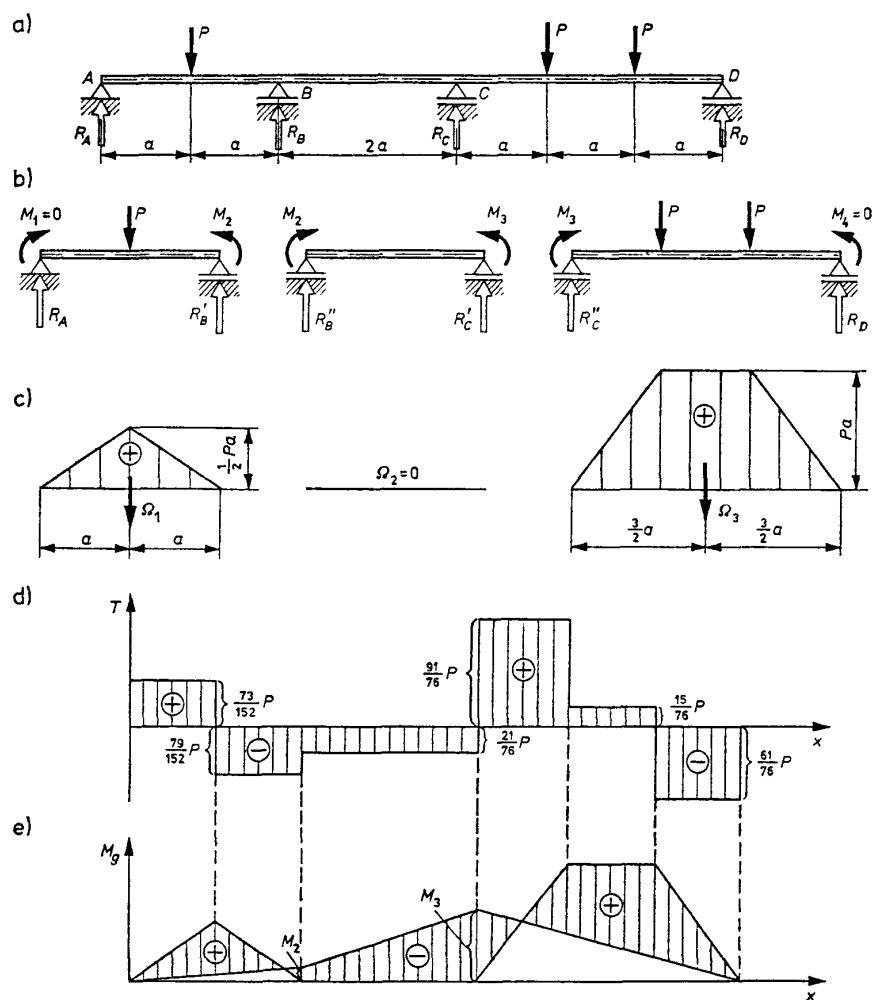
a dla przęsła środkowego i prawego

$$M_2 \cdot 2a + 2M_3(2a + 3a) + M_4 \cdot 3a = -0 - 6 \frac{\Omega_3 \cdot \frac{3}{2} a}{3a}$$

skąd po uproszczeniach otrzymujemy układ równań

$$8M_2 + 2M_3 = -\frac{3}{2} Pa$$

$$2M_2 + 10M_3 = -6Pa$$



Rys. 12.7. Do zadania 12.7

Stąd

$$M_2 = -\frac{3}{76}Pa$$

$$M_3 = -\frac{45}{76}Pa$$

Z równań statyki dla przęsła lewego otrzymujemy wartości reakcji: $R_A = \frac{73}{152}P$ oraz $R_B' = \frac{79}{152}P$, dla przęsła środkowego: $R_B'' = -\frac{1}{76}P$ oraz $R_C' = +\frac{21}{76}P$, a dla

przęsła prawego: $R'_C = \frac{91}{76}P$ oraz $R_D = \frac{61}{76}P$. Reakcja $R_B = R'_B + R''_B = \frac{37}{152}P$, natomiast $R_C = R'_C + R''_C = \frac{28}{19}P$.

Wykresy sił tnących i momentów gnących przedstawiono na rys. 12.7d oraz e.

Zadanie 12.8. Obliczyć największą wartość momentu gnącego występującego w belce przedstawionej na rys. 12.8.

Rozwiązanie. Belkę dzielimy na trzy przęsła (rys. 12.8b). Wykres momentów gnących od obciążeń zewnętrznych pokazano na rys. 12.8c. Pole wykresu $\Omega_2 = -\frac{1}{8}Ml$, $\Omega_3 = +\frac{1}{8}Ml$. Dwa równania trzech momentów mają postać

$$0 + 2M_1(0 + l) + M_2l = 0$$

$$M_1l + 2M_2(l + l) + M_3l = 0 - 6 \frac{\Omega_2 \cdot \frac{2}{3}l + \Omega_3 \cdot \frac{1}{3}l}{l}$$

skąd otrzymujemy $M_1 = -\frac{1}{18}M$ i $M_2 = +\frac{1}{14}M$. Wykres momentów gnących przedstawiono na rys. 12.8d. Największy moment gnący występuje w środku prawego przęsła i wynosi

$$M_{max} = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{14}M = \frac{15}{28}M$$

Z równań równowagi wynika, że reakcje podpór wynoszą

$$R_A = \frac{8}{63} \frac{M}{l}, \quad R_B = -\frac{151}{126} \frac{M}{l}, \quad R_C = \frac{15}{14} \frac{M}{l}$$

Wykres sił tnących przedstawiono na rys. 12.8e.

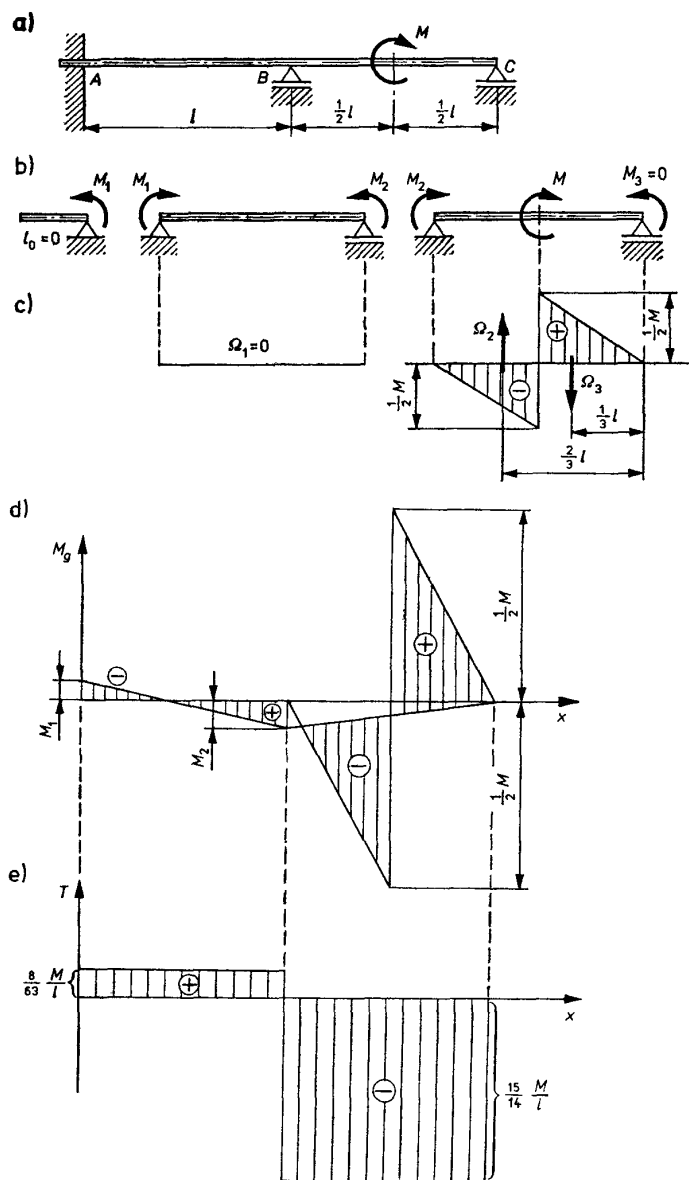
Zadanie 12.9. Wyznaczyć momenty utwierdzenia dla belki pokazanej na rys. 12.9a.

Rozwiązanie. Utwierdzenia zastępujemy dodatkowymi przęslami (rys. 12.9b), przyjmując $l_2 = 0$, $l_3 = 0$, a następnie $\Omega_1 = 0$, $\Omega_3 = 0$. Piszemy równania trzech momentów: najpierw dla przęsła 1 i 2

$$0 \cdot 0 + 2M_A(0 + l) + M_Bl = -\frac{6 \cdot 0 \cdot 0}{0} - \frac{6Pb \frac{l-b}{2} \frac{l+b}{3}}{l}$$

a następnie dla przęsła 2 i 3

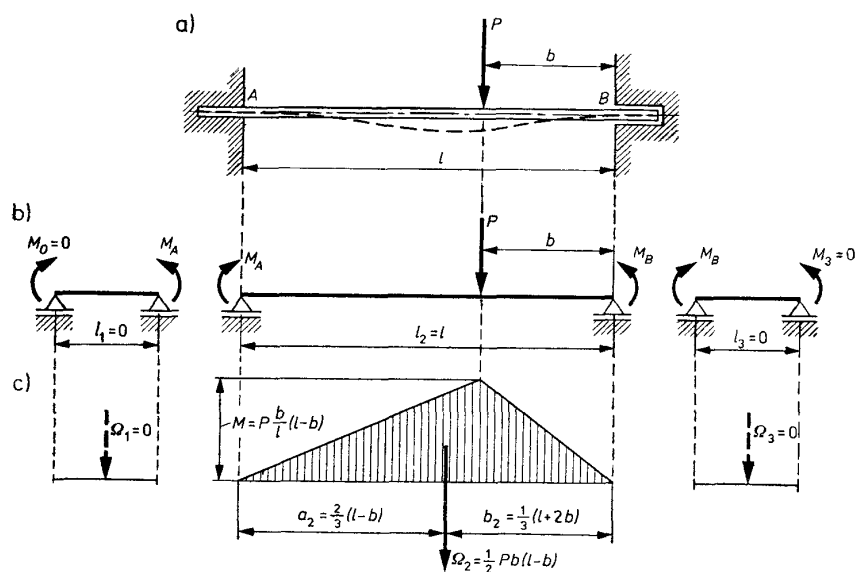
$$M_Al + 2M_B(l + 0) + 0 \cdot 0 = -\frac{6Pb \frac{l-b}{2} \frac{2l-b}{3}}{l} - \frac{6 \cdot 0 \cdot 0}{0}$$



Rys. 12.8. Do zadania 12.8

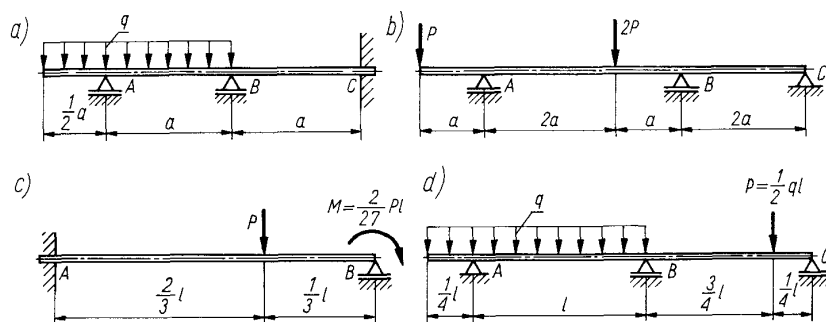
Z równań tych znajdujemy

$$M_A = -P(l-b) \left(\frac{b}{l} \right)^2, \quad M_B = -Pb \left(1 - \frac{b}{l} \right)^2$$



Rys. 12.9. Do zadania 12.9

Zadanie 12.10. Obliczyć wartości momentów podporowych oraz wykonać wykresy M_g dla belek podanych na rys. 12.10.



Rys. 12.10. Do zadania 12.10

ODPOWIEDŹ:

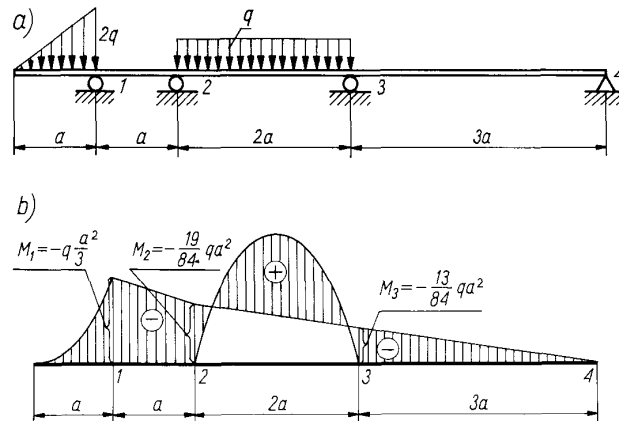
$$a) \quad M_A = -\frac{1}{8}qa^2, \quad M_B = -\frac{1}{28}qa^2, \quad M_C = \frac{1}{56}qa^2$$

$$b) \quad M_A = -Pa, \quad M_B = -\frac{11}{30}Pa$$

$$c) \quad M_A = -\frac{1}{9}Pl$$

$$d) \quad M_A = -\frac{1}{32}ql^2, \quad M_B = -\frac{43}{512}ql^2$$

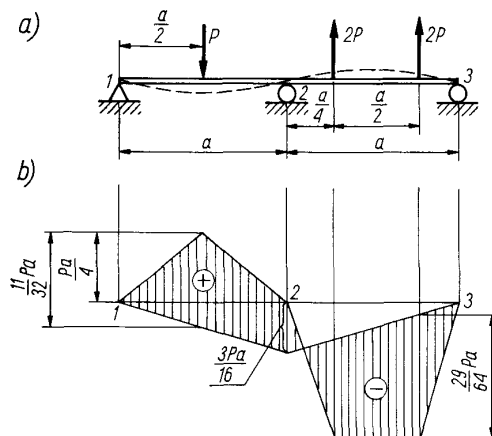
Zadanie 12.11. Wykonać wykres momentów gnących dla belki spoczywającej na czterech podporach (rys. 12.11).



Rys. 12.11. Do zadania 12.11

ODPOWIEDŹ. Rysunek 12.11b.

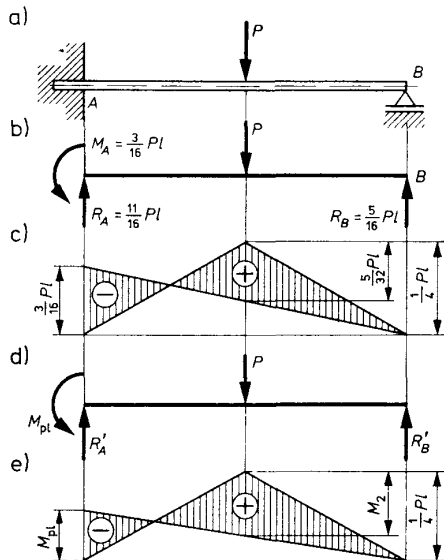
Zadanie 12.12. Wykonać wykres momentów gnących dla belki pokazanej na rys. 12.12a.



Rys. 12.12. Do zadania 12.12

ODPOWIEDŹ. Rysunek 12.12b.

Zadanie 12.13. Stosując metodę naprężeń dopuszczalnych oraz metodę nośności granicznej, obliczyć dopuszczalną wartość siły P , jaką można obciążyć belkę podaną na rys. 12.13a. Przekrojem poprzecznym belki jest prostokąt o bokach $b \times h$. Dane: granica plastyczności $R_e = 240$ MPa, współczynnik bezpieczeństwa $n = 1.5$, $b = 6$ cm, $h = 4$ cm, $l = 3$ m.



Rys. 12.13. Do zadania 12.13

Rozwiązanie. Znanymi metodami wyznaczamy reakcje więzów (rys. 12.13b) oraz wykonujemy wykres momentów gnących (rys. 12.13c).

Największy moment gnący występuje w przekroju utwierdzenia i wynosi $M_A = \frac{3}{16}Pl$, zatem dopuszczalna wartość siły $P = P_1$ obliczona metodą naprężeń dopuszczalnych ze wzoru

$$\sigma_g = \frac{M_{max}}{W} = \frac{3}{16} \frac{P_1 l \cdot 6}{bh^2} \leq k_g = \frac{R_e}{n}$$

wynosi

$$P_1 = \frac{8}{9} \frac{bh^2}{l} \frac{R_e}{n} = 454 \text{ kN}$$

Przeprowadzając obliczenia metodą nośności granicznej, dopuszczamy powstanie przegubu plastycznego w najbardziej obciążonym przekroju, a więc dla $M_A = M_{pl}$. Układ sił zewnętrznych działających wówczas na belkę jest taki jak na rys. 12.13d. Wykres momentów gnących dla tego obciążenia jest superpozycją

wykresu od siły P (rys. 12.13e) i od momentu M_{pl} , zatem moment gnący w środku długości belki wynosi

$$M_2 = \frac{1}{4}Pl - \frac{1}{2}M_{pl}$$

Po utworzeniu się przegubu plastycznego w przekroju utwierdzenia A belka będzie pracować jako ustrój sprężysty aż do chwili, gdy w drugim miejscu – w danym przypadku w połowie długości belki – pojawi się przegub plastyczny, to jest do chwili, gdy M_2 osiągnie wartość M_{pl} . Otrzymujemy zatem dla tego stanu

$$M_2 = \frac{1}{4}Pl - \frac{1}{2}M_{pl} = M_{pl}$$

Stąd

$$P = \frac{6}{l}M_{pl}$$

Przy pełnym uplastycznieniu przekrój prostokątny może przenosić moment gnący

$$M_{pl} = 2R_e b \frac{h}{2} \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{4}R_e$$

Przy tym samym współczynniku bezpieczeństwa $n = 1,5$ dopuszczalna wartość siły $P = P_2$ obliczona metodą nośności granicznej wynosi

$$P_2 = \frac{6}{l} \frac{M_{pl}}{n} = \frac{6}{l} \frac{bh^2 R_e}{4n} = \frac{27}{16} P_1 = 770 \text{ kN}$$

Belki na sprężystym podłożu

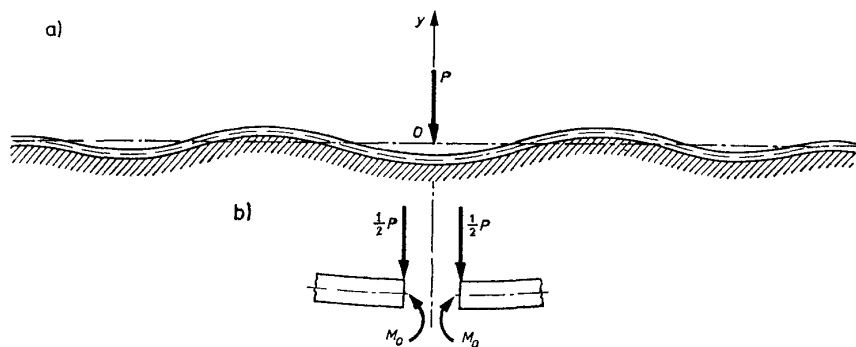
13

Wprowadzenie

Sprężyste podłoże (typu Winklera) charakteryzujemy *stałą sprężystą* k . Stała ta określa, jaką siłą k niutonów należy działać na odcinek belki o jednostkowej długości, aby zagłębił się on w podłoże o taką samą jednostkę. Jeżeli za jednostkę długości przyjmiemy 1 mm, wówczas wymiarem stałej sprężystej k jest $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$.

Oznaczenia dotyczące belek na sprężystym podłożu oraz sposób wyznaczania stałych całkowania (dla belek długich, gdy $\beta l \geq 5$) podano w kilku kolejnych przykładach.

Zadanie 13.1. Wyznaczyć maksymalny moment gnący M_0 i strzałkę ugięcia f belki długiej spoczywającej na podłożu sprężystym i obciążonej w środku długości siłą P .



Rys. 13.1. Do zadania 13.1

Rozwiązanie. Równanie linii ugięcia belki długiej spoczywającej na sprężystym podłożu o stałej k i obciążonej z góry działającym obciążeniem ciągłym $q = \text{const}$ ma postać

$$y = e^{-\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) - \frac{q}{k} \quad (13.1)$$

a kolejne pochodne tego równania wyrażają się następująco

$$\frac{dy}{dx} = -\beta e^{-\beta x}[(C_1 + C_2) \sin \beta x + (C_1 - C_2) \cos \beta x] \quad (13.2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\beta^2 e^{-\beta x}(C_1 \sin \beta x - C_2 \cos \beta x) \quad (13.3)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2\beta^3 e^{-\beta x}[(C_1 - C_2) \sin \beta x + (C_2 + C_1) \cos \beta x] \quad (13.4)$$

Równanie linii ugięcia tej belki zawiera dwie stałe całkowania (wzór (13.1)), które wyznaczymy z warunków brzegowych. Z uwagi na symetrię układu w przekroju pod siłą P styczna do linii ugięcia belki jest pozioma, a siły wewnętrzne w belce sprowadzają się jedynie do momentu M_0 (siła tnąca i siła normalna są równe zero). W przekroju tym na prawą (rozpatrywaną) połowę belki (rys. 13.1b) działa więc moment gnący M_0 oraz siła tnąca równa $-\frac{1}{2}P$. Z równań (13.1)÷(13.4) mamy

$$(\theta)_{x=0} = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = -\beta(C_1 - C_2) = 0$$

$$(M_g)_{x=0} = EJ \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=0} = EJ \cdot 2\beta^2(-C_2) = M_0$$

$$(T)_{x=0} = EJ \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)_{x=0} = EJ \cdot 2\beta^3(C_2 + C_1) = -\frac{1}{2}P$$

Z równań tych otrzymujemy

$$C_1 = C_2 = \frac{-P}{8\beta^3 EJ} \quad \text{oraz} \quad M_0 = \frac{P}{4\beta} = \frac{P}{4} \sqrt{\frac{4EJ}{k}} \quad (13.5)$$

gdzie

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} \quad (13.6)$$

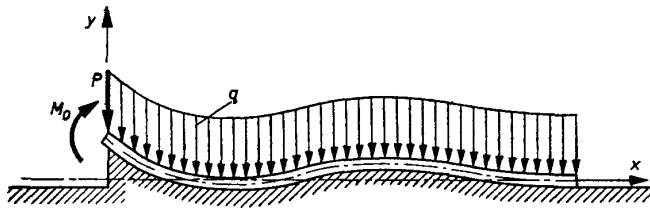
Maksymalny moment gnący występuje pod siłą P i jest równy M_0 , a strzałka ugięcia belki (pod siłą P , tj. dla $x = 0$) wynosi

$$f = \frac{P}{8\beta^3 EJ} = \frac{P\beta}{2k} \quad (13.7)$$

Po podstawieniu tej zależności do wzoru (13.1) równanie linii ugięcia belki, pokazanej na rys. 13.1a, ma postać

$$y = -\frac{P}{8\beta^3 EJ} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \quad (13.8)$$

Zadanie 13.2. Wyznaczyć równanie linii ugięcia i momentów gnących oraz strzałkę i kąt ugięcia lewego końca belki, pokazanej na rys. 13.2. Dane: P , M_0 , q , k , EJ .



Rys. 13.2. Do zadania 13.2

Rozwiązanie. Belka jest długa ($\beta l > 5$), zastosujemy więc równania (13.1)÷(13.4). Z warunków brzegowych

$$(T)_{x=0} = EJ \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_{x=0} = -P \quad \text{oraz} \quad (M_g)_{x=0} = EJ \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=0} = M_0$$

wyznaczamy

$$C_1 = \frac{1}{2\beta^2 EJ} \left(M_0 - \frac{P}{\beta} \right), \quad C_2 = -\frac{M_0}{2\beta^2 EJ}$$

zatem równanie linii ugięcia ma postać

$$y = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^2 EJ} \left[\left(M_0 - \frac{P}{\beta} \right) \cos \beta x - M_0 \sin \beta x \right] - \frac{q}{k} \quad (13.9)$$

zaś równanie momentów gnących

$$M_g = EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = e^{-\beta x} \left[\left(M_0 - \frac{P}{\beta} \right) \sin \beta x + M_0 \cos \beta x \right] \quad (13.10)$$

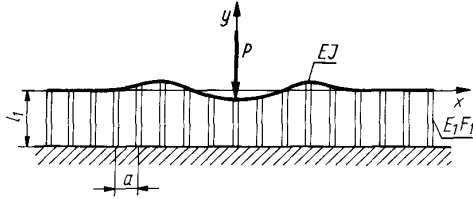
Z równania (13.9) dla $x = 0$ wyznaczamy strzałkę ugięcia f

$$f = \frac{1}{2\beta^2 EJ} \left(M_0 - \frac{P}{\beta} \right) - \frac{q}{k} \quad (13.11)$$

a z równania (13.2), dla $x = 0$, kąt θ

$$\theta = -\beta(C_1 - C_2) = -\frac{1}{2\beta EJ} \left(2M_0 - \frac{P}{\beta} \right) \quad (13.12)$$

Zadanie 13.3. Wyznaczyć stałą sprężystą podłoża oraz strzałkę ugięcia belki (rys. 13.3) o sztywności EJ , obciążonej siłą P i spoczywającej na układzie licznych, blisko siebie położonych, jednakowych prętów, każdy o długości l_1 , przekroju F_1 i module Younga E_1 . Rozstawienie prętów wynosi a .



Rys. 13.3. Do zadania 13.3

Rozwiązanie. Aby dowolna podpora doznała wydłużenia y , musi być, zgodnie z prawem Hooke'a, rozciągana siłą R , określoną wzorem

$$R = y \frac{E_1 F_1}{l_1}$$

Stała podłoża jest więc ilorazem siły R odpowiadającej przemieszczeniu $y = 1$ przez rozstaw prętów a

$$k = \left(\frac{R}{a} \right)_{y=1} = \frac{E_1 F_1}{a l_1}$$

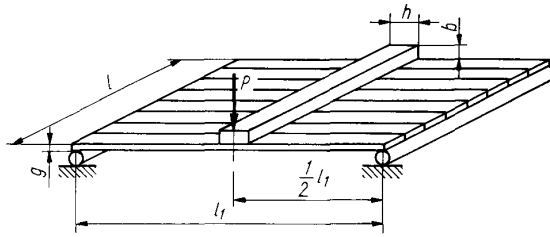
Strzałkę ugięcia obliczamy zgodnie ze wzorem (13.7)

$$f = \frac{P\beta}{2k} = \frac{P}{2k} \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$$

Zadanie 13.4. Belka stalowa o przekroju prostokątnym $b \times h$ i długości l jest przymocowana do podłogi wykonanej z desek o grubości g i długości l_1 . Końce desek są przymocowane do podpór jak na rys. 13.4. Wyznaczyć maksymalne naprężenie w belce stalowej i w deskach, jeżeli jeden koniec belki został obciążony siłą P . Moduł Younga dla stali oznaczamy E , a dla drewna – E_1 . Przyjąć, że belka jest długa ($\beta l > 5$).

Rozwiązanie. Aby wywołać ugięcie jednej deski o strzałkę y , należy działać na tę deskę siłą R określoną wzorem (tabl. 21.3 poz. 4)

$$R = y \frac{48E_1 J_1}{l_1^3} \quad (a)$$



Rys. 13.4. Do zadania 13.4

gdzie

$$J_1 = \frac{b_1 g^3}{12}$$

Stała podłoża jest równa sile potrzebnej do nadania ugięcia $y = 1$ desce o szerokości równej jednostce ($b = 1$)

$$k = \left(\frac{R}{b_1} \right)_{y=1} = \frac{48E_1 J_1}{b_1 l_1^3} = \frac{4E_1 g^3}{l_1^3} \quad (b)$$

Największe naprężenia w deskach podłogi powstają pod siłą P . Zgodnie ze wzorem (13.11) strzałka ugięcia w tym miejscu wynosi

$$f = \frac{P}{2\beta^3 EJ}$$

gdzie

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}, \quad J = \frac{bh^3}{12}$$

Aby podłoga pod siłą P ugięła się o strzałkę f , na deskę o szerokości jednostkowej $b_1 = 1$ musi działać siła $P_1 = fk$. Maksymalny moment gnący w tej desce wynosi $M_1 = \frac{1}{4}P_1 l_1$, a wskaźnik wytrzymałości $W_1 = \frac{1}{6}g^2$, zatem największe naprężenie gnące w desce podłogi wynosi

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{W_1} = \frac{3P_1 l_1}{2g^2} = \frac{3fk l_1}{2g^2} = \frac{36PE_1 g}{\beta^3 E b h^2 l^2}$$

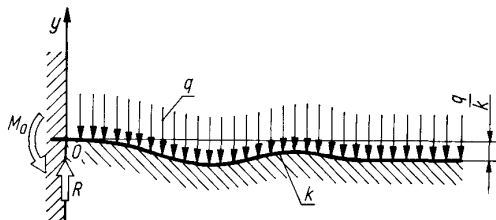
Aby wyznaczyć największe naprężenia, jakie wystąpią w belce stalowej, należy wyznaczyć maksymalny moment gnący ze wzoru

$$|M_g| = EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{\beta} e^{-\beta x} \sin(\beta x)$$

Maksimum występuje dla $\beta x = 0,8$ i wynosi

$$M_{max} = 0,3223 \frac{P}{\beta} = 0,3223 P \sqrt[4]{\frac{4EJ}{k}}$$

Zadanie 13.5. Wyznaczyć równanie linii ugięcia belki na sprężystym podłożu o stałej k , utwierdzonej w jednym końcu i poddanej działaniu obciążenia ciągłego o natężeniu q .



Rys. 13.5. Do zadania 13.5

Rozwiązanie. Zgodnie z założeniami dotyczącymi definicji sprężystego podłoża stwierdzamy, że skoro w danym przypadku na każdy centymetr długości belki działa z góry obciążenie q , to reakcja podłoża przy dodatnim przemieszczeniu y ma również kierunek obciążenia q (z góry do dołu) i równa jest ky . Łączna wartość obciążenia ciągłego działającego na belkę wynosi więc

$$ky + q$$

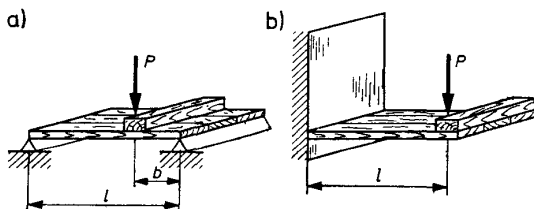
Równanie różniczkowe linii ugięcia belki jest określone zależnością (13.1). Stałe całkowania C_1 i C_2 oraz reakcje statycznie niewyznaczalne R i M_0 wyznaczamy z warunków brzegowych

$$(y)_{x=0} = 0, \quad EJ \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = 0, \quad EJ \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=0} = M_0, \quad EJ \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)_{x=0} = R$$

Po dokonaniu działań otrzymujemy

$$M_0 = \frac{q}{2\beta^2}, \quad R = \frac{q}{\beta}$$

Zadanie 13.6. Wyznaczyć stałe sprężyste podłoża utworzonego z desek o grubości g i modułu Younga E_1 w układach przedstawionych na rys. 13.6a i b.



Rys. 13.6. Do zadania 13.6

ODPOWIEDŹ:

$$\text{a) } k = \frac{E_1 l g^3}{4b^2(l-b)^2}, \quad \text{b) } k = \frac{E_1 g^3}{4l^3}$$

Pręty silnie zakrzywione

14

Wprowadzenie

Wzory dotyczące prętów silnie zakrzywionych (haki, ogniwa łańcuchów itp.) stosujemy wówczas, gdy $r < 5h$, gdzie r jest promieniem krzywizny linii utworzonej ze środków ciężkości przekrojów poprzecznych pręta, zaś h – wysokością przekroju poprzecznego pręta (prostopadłą do osi obojętnej).

Promień krzywizny warstwy obojętnej pręta silnie zakrzywionego jest określony wzorem

$$r = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{u}} \quad (14.1)$$

Zadanie 14.1. Dla pręta zakrzywionego o przekroju prostokątnym $b \times h$ wyznaczyć promień krzywizny warstwy obojętnej. Promień krzywizny osi pręta wynosi r_C .

R o z w i ą z a n i e. Przekrój poprzeczny pręta i podstawowe wymiary (przyjęte oznaczenia) przedstawiono na rys. 14.1.

Zgodnie z oznaczeniami podanymi na rysunku dla przekroju prostokątnego mamy

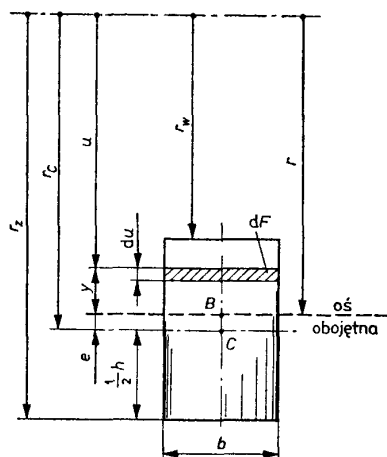
$$dF = b du, \quad F = bh$$

Wewnętrzny promień krzywizny $r_w = r_C - \frac{1}{2}h$, a zewnętrzny promień krzywizny $r_z = r_C + \frac{1}{2}h$. Otrzymujemy więc

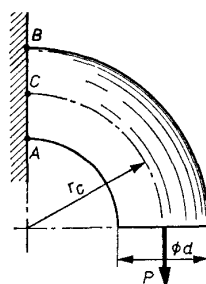
$$\int_F \frac{dF}{u} = \int_{r_w}^{r_z} \frac{b du}{u} = b(\ln r_z - \ln r_w) = b \ln \frac{r_z}{r_w}$$

Po podstawieniu otrzymanych zależności do wzoru (14.1) promień krzywizny osi obojętnej pręta zakrzywionego o przekroju prostokątnym wynosi

$$r = \frac{h}{\ln \frac{r_z}{r_w}}$$



Rys. 14.1. Do zadania 14.1



Rys. 14.2. Do zadania 14.2

Zadanie 14.2. Obliczyć naprężenia w pręcie obciążonym siłą $P = 50 \text{ kN}$, którego przekrój poprzeczny jest kołem o średnicy $d = 10 \text{ cm}$, a oś pręta tworzy łuk koła o promieniu $r_c = 20 \text{ cm}$ (rys. 14.2). Obliczenia wykonać na podstawie wzorów dotyczących prętów silnie i słabo zakrzywionych.

Rozwiązanie. Promień warstwy obojętnej według wzoru z tabl. 14.1 wynosi

$$r = \frac{d^2}{4(2r_c - \sqrt{4r_c^2 - d^2})} = \frac{10^2}{4(2 \cdot 20 - \sqrt{4 \cdot 20^2 - 10^2})} = 19,682 \text{ cm}$$

Moment gnący w przekroju utwierdzonym jest równy

$$M_g = Pr_c = 50\,000 \cdot 0,2 = 10\,000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

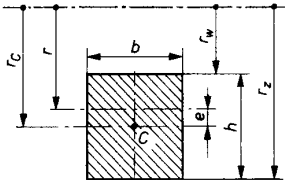
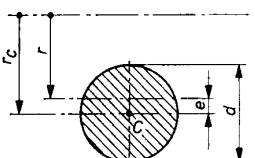
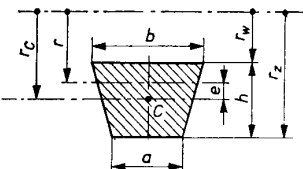
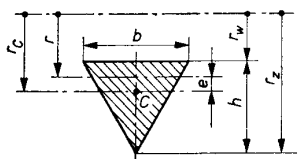
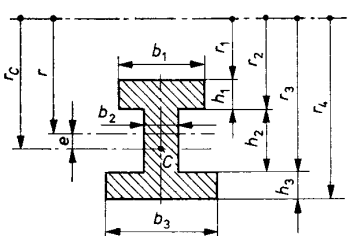
Moment statyczny przekroju względem osi obojętnej wynosi

$$S = Fe = \frac{1}{4} \pi d^2 (r_c - r) = \frac{1}{4} \pi \cdot 10^2 (20 - 19,682) = 25 \text{ cm}^3$$

Naprężenia ściskające w punkcie A wynoszą

$$\sigma_A = \frac{M_g}{S} \frac{y_A}{r_w} = \frac{10\,000 \cdot 10^3}{25 \cdot 10^3} \frac{46,82}{150} = 124,7 \text{ MPa}$$

Tablica 14.1. Promienie krzywizn warstwy obojętnej w zginanych prętach silnie zakrzywionych

Przekrój poprzeczny pręta (C – środek ciężkości przekroju)	Wzór na promień krzywizny r warstwy obojętnej
	$r = \frac{h}{\ln \frac{2r_c + h}{2r_c - h}} = \frac{h}{\ln \frac{r_z}{r_w}}$
	$r = \frac{d^2}{4[2r_c - \sqrt{4r_c^2 - d^2}]}$
	$r = \frac{\frac{1}{2}(a+b)h}{\left(b + r_z \frac{b-a}{h}\right) \ln \frac{r_z}{r_w} - (b-a)}$
	$r = \frac{\frac{1}{2}bh}{r_z \frac{b}{h} \ln \frac{r_z}{r_w} - b}$
	$r = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3}{b_1 \ln \frac{r_2}{r_1} + b_2 \ln \frac{r_3}{r_2} + b_3 \ln \frac{r_4}{r_3}}$

a naprężenia rozciągające w punkcie B

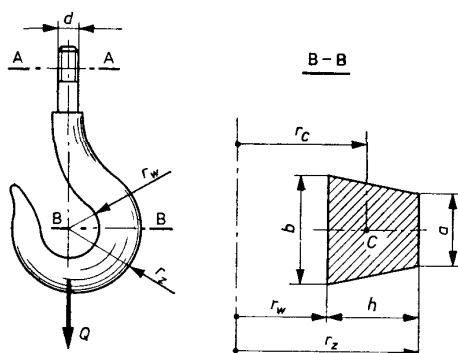
$$\sigma_B = \frac{M_g}{S} \frac{y_B}{r_z} = \frac{10000 \cdot 10^3}{25 \cdot 10^3} \frac{53,18}{250} = 85,0 \text{ MPa}$$

Naprężenia obliczone według teorii prętów słabo zakrzywionych są równe

$$\sigma = \frac{M_g}{W} = \frac{M_g}{\frac{1}{32}\pi d^3} = \frac{10000 \cdot 10^3}{\frac{1}{32}\pi \cdot 100^3} = 102 \text{ MPa}$$

a więc błąd w porównaniu z wartością rzeczywistą wynosi $\sim 20\%$.

Zadanie 14.3. Obliczyć największe naprężenia występujące w haku pokazanym na rys. 14.3, jeżeli siła obciążająca wynosi $Q = 10 \text{ kN}$. Wymiary haka: $a = 2,0 \text{ cm}$, $b = 3,8 \text{ cm}$, $h = 5,0 \text{ cm}$, $r_w = 2,9 \text{ cm}$, gwint $M27 \times 3$.



Rys. 14.3. Do zadania 14.3

Rozwiązanie. Naprężenia w przekroju $A-A$ części gwintowanej trzonu (pole przekroju rdzenia śruby $M27 \times 3$ wynosi $F_r = 4,19 \text{ cm}^2$) wynoszą

$$\sigma_A = \frac{Q}{F_r} = \frac{10000}{419} = 23,9 \text{ MPa}$$

Przystępujemy do obliczenia naprężeń w przekroju $B-B$.

Pole przekroju wynosi

$$F = \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{1}{2}(2,0+3,8) \cdot 5,0 = 14,5 \text{ cm}^2$$

odległość środka ciężkości przekroju od szerszej podstawy

$$h_C = \frac{h(b+2a)}{3(a+b)} = \frac{5,0(3,8+2 \cdot 2,0)}{3(2,0+3,8)} = 2,24 \text{ cm}$$

Promień krzywizny osi haka $r_C = r_w + h_C = 2,9 + 2,24 = 5,14 \text{ cm}$.

Naprężenia w przekroju $B-B$ od rozciągania wynoszą

$$\sigma_r = \frac{Q}{F} = \frac{10000}{1450} = 7,0 \text{ MPa}$$

Moment gnący w przekroju

$$M_g = Qr_C = 10\,000 \cdot 5,14 = 51\,400 \text{ N} \cdot \text{cm} = 514 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Promień krzywizny warstwy obojętnej według wzoru z tabl. 14.1 wynosi

$$\begin{aligned} r &= \frac{\frac{1}{2}h(a+b)}{\left(b + r_z \frac{b-a}{h}\right) \ln \frac{r_z}{r_w} - (b-a)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 5,0(2,0+3,8)}{\left(3,8 + 7,9 \frac{3,8-2,0}{5,0}\right) \ln \frac{7,9}{2,9} - (3,8-2,0)} = 4,74 \text{ cm} \end{aligned}$$

Moment statyczny przekroju poprzecznego względem osi obojętnej jest równy

$$S = F(r_C - r) = 14,5(5,14 - 4,74) = 5,8 \text{ cm}^3$$

Napężenie gnące po wewnętrznej stronie przekroju (rozciągające)

$$\sigma_{g1} = \frac{M_g}{S} \frac{r - r_w}{r_w} = \frac{514 \cdot 10^3}{5,8 \cdot 10^3} \frac{47,4 - 29}{29} = 56,5 \text{ MPa}$$

a po zewnętrznej (ściskające)

$$\sigma_{g2} = \frac{M_g}{S} \frac{r_z - r}{r_z} = \frac{514 \cdot 10^3}{5,8 \cdot 10^3} \frac{79 - 47,4}{79} = 31,0 \text{ MPa}$$

Największe napężenia w przekroju $B-B$ występują po wewnętrznej stronie haka i wynoszą

$$\sigma_{max} = \sigma_r + \sigma_{g1} = 7,0 + 56,5 = 63,5 \text{ MPa}$$

Zadanie 14.4. Pręt o przekroju prostokątnym (wysokość $h = 5 \text{ cm}$, szerokość $b = 3 \text{ cm}$) wygięty jest w kształcie łuku koła o promieniu $r_C = 25 \text{ cm}$ i obciążony momentem gnącym $M_g = 200\,000 \text{ N} \cdot \text{m}$. Obliczyć promień warstwy obojętnej oraz największe napężenie zginające w pręcie.

ODPOWIEDŹ.

$$r = 24,91 \text{ cm}, \quad \sigma_{max} = 158,7 \text{ MPa}$$

Twierdzenie Castigliana.

Układy statycznie wyznaczalne

15

Wprowadzenie

Zgodnie z *twierdzeniem Castigliana* współrzędna uogólniona f_i odpowiadająca sile uogólnionej P_i jest równa pochodnej cząstkowej energii sprężystej V danego układu względem tej siły uogólnionej

$$f_i = \frac{\partial V}{\partial P_i} \quad (15.1)$$

W celu ułatwienia obliczeń w tabl. 15.1 podano wartości niektórych całek występujących najczęściej w obliczeniach prętów zakrzywionych.

Tablica 15.1.

$\int \sin \varphi \, d\varphi = -\cos \varphi$
$\int \cos \varphi \, d\varphi = \sin \varphi$
$\int \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi$
$\int \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi$
$\int \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi$

Zadanie 15.1. Obliczyć przemieszczenie pionowe punktu przyłożenia siły P dla pręta pokazanego na rys. 15.1.

Rozwiązanie. Zgodnie z twierdzeniem Castigliana przemieszczenie pionowe wyznaczmy ze wzoru $f = \partial V / \partial P$. Energia V jest sumą energii sprężystej nagromadzonej w dwu przedziałach pręta:

– przedział 1 ($0 \leq x_1 \leq a$)

$$M_{g1} = -Px, \quad \frac{\partial M_{g1}}{\partial P} = -x$$

– przedział 2 ($0 \leq x_2 \leq 2a$)

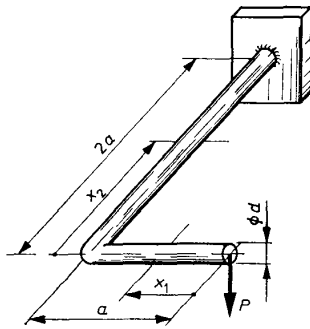
$$M_{g2} = -Px, \quad M_s = Pa, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial P} = -x, \quad \frac{\partial M_s}{\partial P} = a$$

Energia całkowita wyraża się wzorem

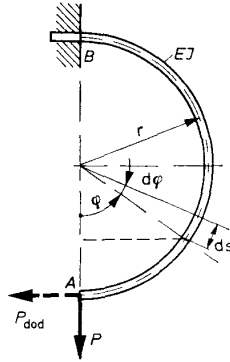
$$V = \int_0^a \frac{M_{g1}^2 dx}{2EJ} + \int_0^{2a} \frac{M_{g2}^2 dx}{2EJ} + \int_0^{2a} \frac{M_s^2 dx}{2GJ_0}$$

Przemieszczenie pionowe punktu przyłożenia siły wynosi

$$\begin{aligned} f = \frac{\partial V}{\partial P} &= \frac{1}{EJ} \int_0^a M_{g1} \frac{\partial M_{g1}}{\partial P} dx + \frac{1}{EJ} \int_0^{2a} M_{g2} \frac{\partial M_{g2}}{\partial P} dx + \frac{1}{2GJ_0} \int_0^{2a} M_s \frac{\partial M_s}{\partial P} dx = \\ &= \frac{1}{EJ} \int_0^a (-Px)(-x) dx + \frac{1}{EJ} \int_0^{2a} (-Px)(-x) dx + \frac{1}{GJ_0} \int_0^{2a} (Pa)a dx = \\ &= Pa^3 \left(\frac{3}{EJ} + \frac{2}{GJ_0} \right) \end{aligned}$$



Rys. 15.1. Do zadania 15.1



Rys. 15.2. Do zadania 15.2

Zadanie 15.2. Określić przemieszczenie pionowe f_v i poziome f_x końca A pręta pokazanego na rys. 15.2.

Rozwiązanie. W punkcie A w kierunku pionowym działa siła P , a więc $f_v = \partial V / \partial P$. W dowolnym przekroju określonym kątem φ w przedziale $0 \leq \varphi \leq \pi$

moment gnący wynosi $M_g = Pr \sin \varphi$, zatem $\partial M_g / \partial P = r \sin \varphi$. Element długości pręta $ds = r d\varphi$.

Przemieszczenie pionowe wynosi

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{EJ} \int_0^\pi M_g \frac{\partial M_g}{\partial P} ds = \frac{1}{EJ} \int_0^\pi Pr \sin \varphi r \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{Pr^3}{EJ} \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi Pr^3}{2EJ} \end{aligned}$$

Aby wyznaczyć przemieszczenie poziome f_x , należy w punkcie A przyłożyć poziomą siłę dodatkową $P_{dod} = 0$, wówczas

$$M_g = Pr \sin \varphi - P_{dod} r (1 - \cos \varphi)$$

$$\frac{\partial M_g}{\partial P_{dod}} = -r(1 - \cos \varphi)$$

zatem

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial V}{\partial P_{dod}} = \frac{1}{EJ} \int_0^\pi M_g \frac{\partial M_g}{\partial P_{dod}} ds = \\ &= \frac{1}{EJ} \int_0^\pi [Pr \sin \varphi - P_{dod} r (1 - \cos \varphi)] [-r(1 - \cos \varphi)] r d\varphi \end{aligned}$$

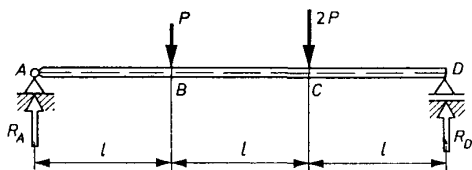
Po wykonaniu różniczkowania względem siły dodatkowej można już wstawić $P_{dod} = 0$, a wówczas

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{EJ} \int_0^\pi Pr \sin \varphi [-r(1 - \cos \varphi)] r d\varphi = \\ &= -\frac{Pr^3}{EJ} \left(\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi - \int_0^\pi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \right) = -\frac{2Pr^3}{EJ} \end{aligned}$$

Znak minus świadczy o tym, że punkt A przemieści się w kierunku przeciwnym do przyjętego zwrotu siły P_{dod} .

Zadanie 15.3. Wyznaczyć składową pionową przemieszczenia punktu C belki, pokazanej na rys. 15.3.

R o z w i ą z a n i e. Aby wyznaczyć składową pionową przemieszczenia punktu C , przy zastosowaniu twierdzenia Castigliana, należy wprowadzić siłę uogólnioną



Rys. 15.3. Do zadania 15.3

odpowiadającą temu przemieszczeniu, a więc $P_1 = 2P$ i wówczas szukane przemieszczenie otrzymamy z zależności $f = \partial V / \partial P_1$. Ze statyki znajdujemy $R_A = \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}P_1$. Dzielimy belkę na trzy przedziały i obliczamy kolejno:

– przedział 1 ($0 \leq x \leq l$)

$$M_{g1} = R_A x = \frac{2}{3}Px + \frac{1}{3}P_1 x, \quad \frac{\partial M_{g1}}{\partial P_1} = \frac{x}{3}$$

– przedział 2 ($l \leq x \leq 2l$)

$$M_{g2} = \frac{2}{3}Px + \frac{1}{3}P_1 x - P(x-l), \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial P_1} = \frac{x}{3}$$

– przedział 3 ($2l \leq x \leq 3l$)

$$M_{g3} = \frac{2}{3}Px + \frac{1}{3}P_1 x - P(x-l) - P_1(x-2l), \quad \frac{\partial M_{g3}}{\partial P_1} = 2l - \frac{2}{3}x$$

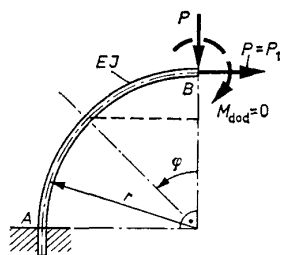
Po wykonaniu różniczkowania względem P_1 podstawiamy $P_1 = 2P$

$$\begin{aligned} f = \frac{\partial V}{\partial P_1} &= \frac{1}{EJ} \left(\int_0^l M_{g1} \frac{\partial M_{g1}}{\partial P_1} dx + \int_l^{2l} M_{g2} \frac{\partial M_{g2}}{\partial P_1} dx + \int_{2l}^{3l} M_{g3} \frac{\partial M_{g3}}{\partial P_1} dx \right) = \\ &= \frac{1}{EJ} \left[\int_0^l \frac{4}{3}Px \frac{x}{3} dx + \int_l^{2l} \left(-\frac{1}{3}Px + Pl \right) \frac{x}{3} dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{2l}^{3l} \left(-\frac{5}{3}Px + 5Pl \right) \left(2l - \frac{2}{3}x \right) dx \right] = \frac{23 Pl^3}{18 EJ} \end{aligned}$$

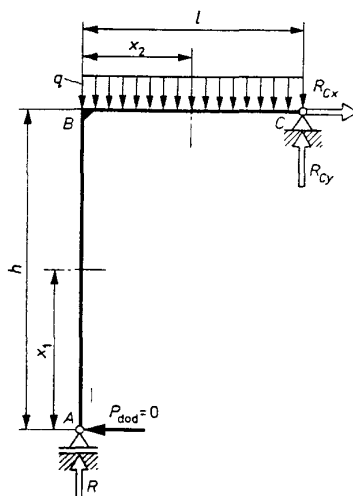
Zadanie 15.4. Obliczyć przemieszczenie poziome f_x , pionowe f_y i kąt obrotu θ końca B pręta, pokazanego na rys. 15.4.

Rozwiązanie. Aby rozróżnić obie siły P , oznaczmy siłę poziomą $P = P_1$, wówczas $f_x = \partial V / \partial P_1$, a $f_y = \partial V / \partial P$. W celu wyznaczenia kąta obrotu θ dodajemy w punkcie B moment dodatkowy $M_{dod} = 0$. Kąt obrotu $\theta = \partial V / \partial M_{dod}$.

$$f_x = \frac{3Pr^3}{2EJ} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right), \quad f_y = \frac{Pr^3}{2EJ} \left(1 + \frac{\pi}{2} \right), \quad \theta = \frac{\pi Pr^3}{2EJ}$$



Rys. 15.4. Do zadania 15.4



Rys. 15.5. Do zadania 15.5

Zadanie 15.5. Obliczyć przemieszczenie poziome podpory A ramy pokazanej na rys. 15.5.

Rozwiązanie. W punkcie A przykładamy poziomą siłę dodatkową $P_{dod} = 0$. Reakcja R w punkcie A wynosi (z sumy momentów względem punktu C)

$$R = \frac{1}{2}ql - P_{dod}\frac{h}{l}$$

Belkę dzielimy na dwa przedziały i obliczamy kolejno.

Przedział 1 ($0 \leq x \leq h$)

$$M_g = P_{dod}x, \quad \frac{\partial M_g}{\partial P_{dod}} = x$$

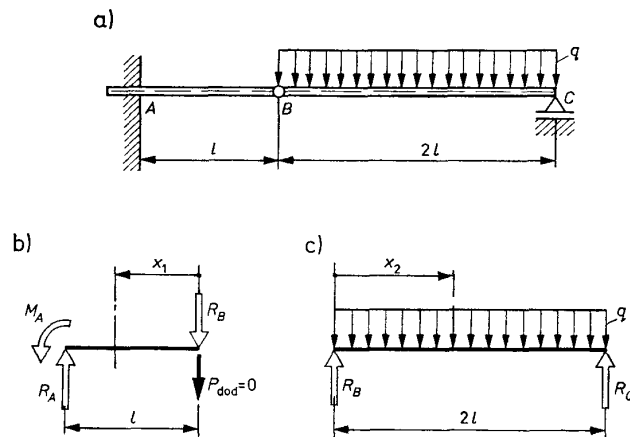
Przedział 2 ($0 \leq x \leq l$)

$$M_g = \left(\frac{1}{2}ql - P_{dod}\frac{h}{l}\right)x + P_{dod}h - \frac{1}{2}qx^2, \quad \frac{\partial M_g}{\partial P_{dod}} = -\frac{h}{l}x + h$$

Przemieszczenie punktu A wynosi

$$f = \frac{\partial V}{\partial P_{dod}} = \frac{1}{EJ} \int_0^h 0 \cdot dx + \frac{1}{EJ} \int_0^l \left(\frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2\right) \left(-\frac{h}{l}x + h\right) dx = \frac{qhl^3}{24EJ}$$

Zadanie 15.6. Wyznaczyć składową pionową przemieszczenia przegubu B łączącego belki pokazane na rys. 15.6



Rys. 15.6. Do zadania 15.6

Rozwiązanie W punkcie B przykładamy dodatkową siłę $P_{dod} = 0$, a następnie rozłączamy, w myśli, belkę w przegubie (rys. 15.6b). Siłę P_{dod} pozostawiamy na przykład na końcu lewej belki. Reakcje podporowe wynoszą wówczas

$$R_B = R_C = ql, \quad R_A = ql + P_{dod}, \quad M_A = ql^2 + P_{dod}l$$

Przedział 1 ($0 \leq x \leq l$)

$$M_g = -(qlx + P_{dod}x), \quad \frac{\partial M_g}{\partial P_{dod}} = -x$$

Przedział 2 ($0 \leq x \leq 2l$)

$$M_g = qlx - \frac{1}{2}qx^2, \quad \frac{\partial M_g}{\partial P_{dod}} = 0$$

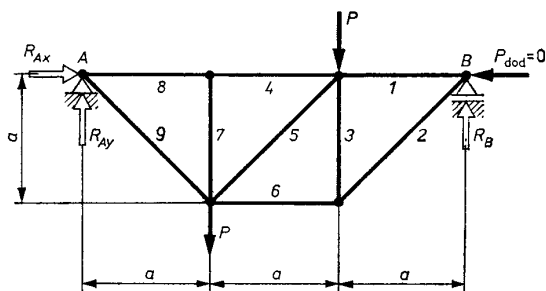
Przemieszczenie przegubu B wynosi

$$f = \frac{\partial V}{\partial P_{dod}} = \frac{1}{EJ} \int_0^l qlx dx + \frac{1}{EJ} \int_0^{2l} 0 dx = \frac{ql^4}{3EJ}$$

Zadanie 15.7. Obliczyć przesunięcie podpory B kratownicy przedstawionej na rys. 15.7. Sztywność rozciągania wszystkich prętów jest jednakowa, równa EF .

Rozwiązanie Reakcje podporowe wynoszą

$$R_{Av} = R_B = P, \quad R_{Ax} = P_{dod}$$



Rys. 15.7. Do zadania 15.7

Przesunięcie podpory B otrzymamy ze wzoru

$$f = \frac{\partial V}{\partial P_{dod}} = \frac{1}{EF} \sum_{i=1}^9 S_i \frac{\partial S_i}{\partial P_{dod}} l_i$$

gdzie S_i jest siłą w pręcie, l_i – długością pręta. Obliczenia powyższej sumy przeprowadzono w tabelce

Nr pręta	S_i	$\frac{\partial S_i}{\partial P_{dod}}$	l_i	$S_i \frac{\partial S_i}{\partial P_{dod}} l_i$
1	$-P - P_{dod}$	-1	a	Pa
2	$P\sqrt{2}$	0	$a\sqrt{2}$	0
3	$-P$	0	a	0
4	$-P - P_{dod}$	-1	a	Pa
5	0	0	$a\sqrt{2}$	0
6	P	0	a	0
7	0	0	a	0
8	$-P - P_{dod}$	-1	a	Pa
9	$P\sqrt{2}$	0	$a\sqrt{2}$	0
Suma:				$3Pa$

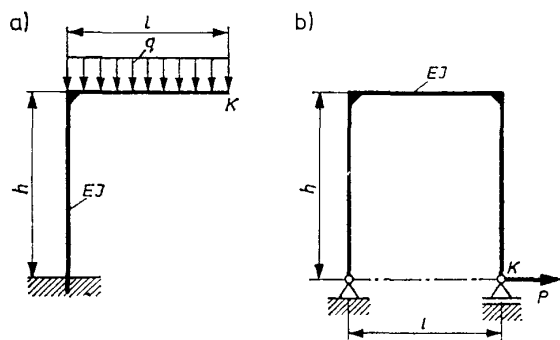
Przesunięcie przegubu B wynosi

$$f = \frac{3Pa}{EF}$$

Zadanie 15.8. Obliczyć składowe poziome przemieszczeń punktów K dla ram pokazanych na rys. 15.8a oraz b.

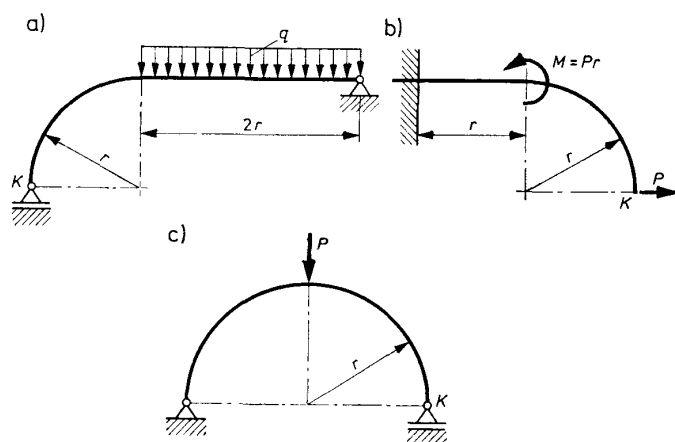
ODPOWIEDŹ:

$$\text{a) } f = \frac{qh^2l^2}{4EJ}, \quad \text{b) } f = \frac{Pl^2}{3EJ}(3l + 2h)$$



Rys. 15.8. Do zadania 15.8

Zadanie 15.9. Obliczyć składową poziomą przemieszczeń punktów K dla ram pokazanych na rys. 15.9.



Rys. 15.9. Do zadania 15.9

ODPOWIEDŹ:

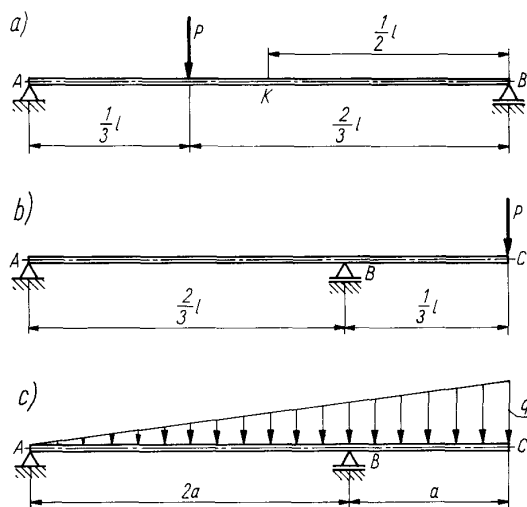
$$\text{a) } f_K = \frac{qr^4}{EJ} \left(\frac{35}{27} - \frac{\pi}{6} \right), \quad \text{b) } f_K = \frac{Pr^3}{EJ} \left(2 + \frac{\pi}{4} \right), \quad \text{c) } f_K = \frac{Pr^3}{2EJ}$$

Zadanie 15.10. Stosując twierdzenie Castigliana, wyznaczyć ugięcia f oraz kąty ugięcia θ charakterystycznych punktów układów pokazanych na rys. 15.10a, b, c.

ODPOWIEDŹ:

$$\text{a) } f_K = \frac{23}{1296} \frac{Pl^3}{EJ}, \quad \theta_A = \frac{5}{81} \frac{Pl^2}{EJ}$$

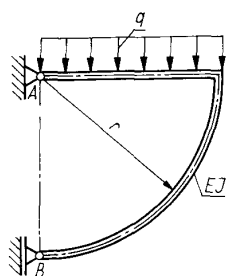
$$\text{b) } f_C = \frac{Pl^3}{27EJ}, \quad \theta_C = \frac{7}{54} \frac{Pl^2}{EJ}$$



Rys. 15.10. Do zadania 15.10

$$c) \quad f_C = \frac{qa^4}{216EJ}, \quad \theta_C = \frac{37}{1080} \frac{qa^3}{EJ}$$

Zadanie 15.11. Stosując twierdzenie Castigliana, wyznaczyć składową pionową przemieszczenia przegubu B ramy podanej na rys. 15.11.



Rys. 15.11. Do zadania 15.11

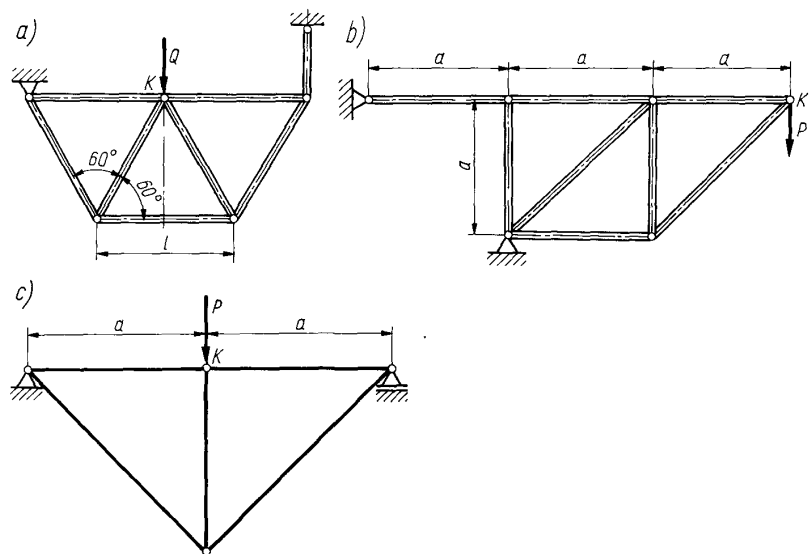
ODPOWIEDŹ:

$$f = \frac{11}{24} \frac{qr^4}{EJ}$$

Zadanie 15.12. Obliczyć składowe pionowe przemieszczeń punktów K dla kratownic pokazanych na rys. 15.12a, b i c. Sztywności rozciągania wszystkich prętów przyjąć jednakowe i równe EF .

ODPOWIEDŹ:

$$a) \quad f_K = \frac{17Ql}{12EF}, \quad b) \quad f_K = \frac{Pa}{EF}(11 + 4\sqrt{2}), \quad c) \quad f_K = \frac{4Pa}{EF}$$



Rys. 15.12. Do zadania 15.12

Twierdzenie Menabrei.

Układy statycznie niewyznaczalne

16

Wprowadzenie

Twierdzenie Menabrei: pochodna cząstkowa energii sprężystej V układu względem statycznie niewyznaczalnej reakcji X jest równa zero

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad (16.1)$$

Równanie takie można napisać dla każdej reakcji statycznie niewyznaczalnej, otrzymując tyle równań, ile wielkości statycznie niewyznaczalnych występuje w danym układzie.

Zadanie 16.1. Stosując twierdzenie Menabrei, obliczyć siły w prętach układu pokazanego na rys. 16.1. Sztywność rozciągania wszystkich prętów jest jednakowa i równa EF .

Rozwiązanie. Przyjmujemy, że wszystkie pręty są rozciągane (rys. 16.1b). Z równań statyki mamy $S_2 = S_3$ oraz $S_1 + P = 2S_2 \cos \alpha$. Zagadnienie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. Za wielkość statycznie niewyznaczalną przyjmujemy siłę $S_1 = X$.

Pręt 1: siła w pręcie $S_1 = X$, $\frac{\partial S_1}{\partial X} = 1$, długość pręta $l_1 = l$.

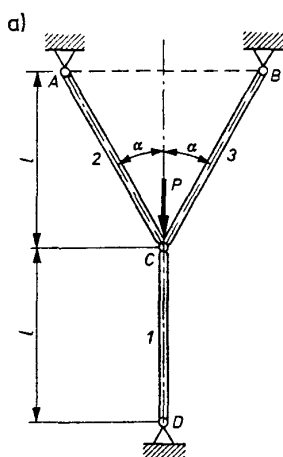
Pręt 2 i 3: $S_2 = \frac{X+P}{2 \cos \alpha}$, $\frac{\partial S_2}{\partial X} = \frac{1}{2 \cos \alpha}$, $l_2 = \frac{l}{\cos \alpha}$.

Stosujemy twierdzenie Menabrei

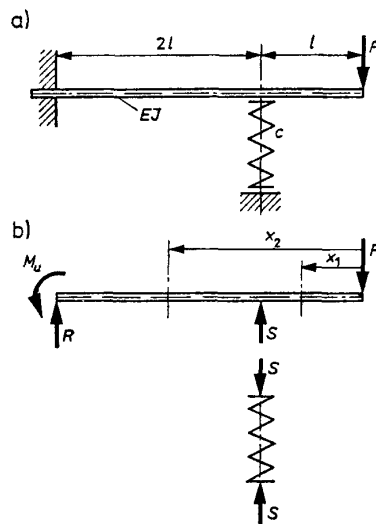
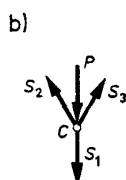
$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial X} = 0 &= \frac{1}{EF} S_1 \frac{\partial S_1}{\partial X} l_1 + \frac{2}{EF} S_2 \frac{\partial S_2}{\partial X} l_2 = \\ &= \frac{1}{EF} X \cdot 1 \cdot l + \frac{2}{EF} \left(\frac{X+P}{2 \cos \alpha} \right) \left(\frac{1}{2 \cos^2 \alpha} \right) \end{aligned}$$

Stąd $S_1 = X = \frac{-P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$, a z równania statyki $S_2 + S_1 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$.

Znak minus przy sile S_1 oznacza, że pręt 1 jest ściskany.



Rys. 16.1. Do zadania 16.1



Rys. 16.2. Do zadania 16.2

Zadanie 16.2. Wspornikowa belka o sztywności na zginanie EJ , obciążona na końcu siłą P , jest podparta dodatkowo sprężyną o stałej c MN/m (rys. 16.2). Obliczyć siłę w sprężynie.

Rozwiązanie. Statycznie niewyznaczalną siłę S w sprężynie wyznaczamy, stosując twierdzenie Menabrei $\partial V / \partial S = 0$. Energia zawarta w sprężynie wynosi $V_s = S^2 / 2c$, $\partial V_s / \partial S = S / c$.

Przedział 1 belki ($0 \leq x \leq l$)

$$M_g = -Px, \quad \frac{\partial M_g}{\partial S} = 0$$

Przedział 2 ($l \leq x \leq 3l$)

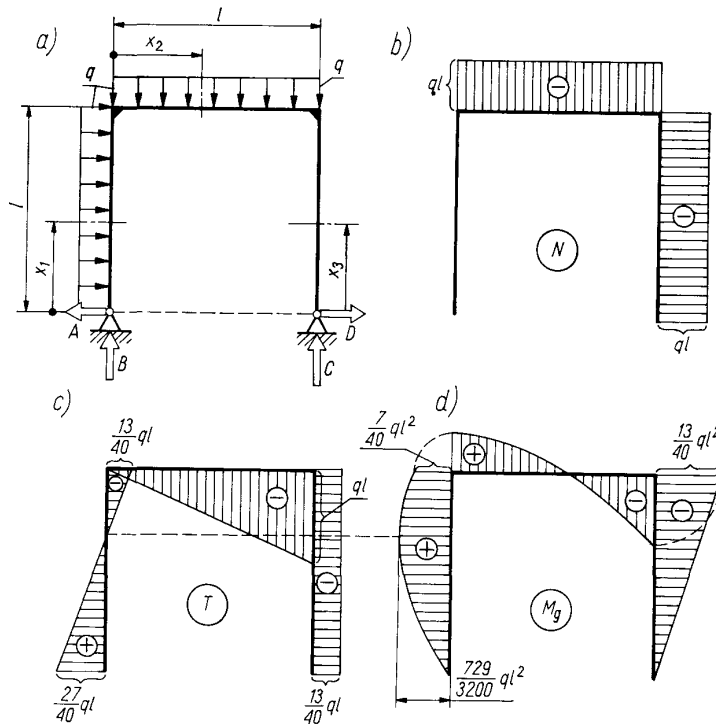
$$M_g = -Px + S(x - l), \quad \frac{\partial M_g}{\partial S} = (x - l)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial S} = 0 &= \frac{1}{EJ} \int_0^l 0 \cdot dx + \frac{1}{EJ} \int_l^{3l} [-Px + S(x - l)](x - l) dx + \frac{S}{c} = \\ &= \frac{2l^3}{3EJ} (4S - 7P) + \frac{S}{c} \end{aligned}$$

stąd

$$S = \frac{14cPl^3}{8cl^3 + 3EJ}$$

Zadanie 16.3. Dla ramy przedstawionej na rys. 16.3a wykonać wykresy sił wewnętrznych.



Rys. 16.3. Do zadania 16.3

Rozwiązanie. Na podstawie warunków równowagi reakcje podporowe wynoszą $B = 0$ oraz $C = ql$. Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne, więc z dwóch pozostałych reakcji wybieramy A jako wielkość statycznie niewyznaczalną i stosujemy twierdzenie Menabrei $\partial V / \partial A = 0$.

Przedział 1 ($0 \leq x_1 \leq l$)

$$M_g = Ax - \frac{1}{2}qx^2, \quad \frac{\partial M_g}{\partial A} = x$$

Przedział 2 ($0 \leq x_2 \leq l$)

$$M_g = Al - \frac{1}{2}ql^2 - \frac{1}{2}qx^2, \quad \frac{\partial M_g}{\partial A} = l$$

Przedział 3 ($0 \leq x_3 \leq l$)

$$M_g = Dx = (A - ql)x, \quad \frac{\partial M_g}{\partial A} = x$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial A} = 0 = & \frac{1}{EJ} \int_0^l \left(Ax - \frac{1}{2}qx^2 \right) x dx + \frac{1}{EJ} \int_0^l \left(Al - \frac{1}{2}ql^2 - \frac{1}{2}qx^2 \right) l dx + \\ & + \frac{1}{EJ} \int_0^l (A - ql)xx dx \end{aligned}$$

skąd $A = \frac{27}{40}ql$.

Wykresy sił wewnętrznych: normalnych, tnących i momentów gnących przedstawiono na rys. 16.3b, c i d.

Zadanie 16.4. Obliczyć reakcje podporowe ramy pokazanej na rys. 16.4.

Rozwiązanie. Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny. Za wielkość statycznie niewyznaczalną przyjmujemy reakcję R . Funkcje momentów zginających i pochodne cząstkowe tych funkcji względem R wynoszą:

– w przedziale 1 ($0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$)

$$M_g = Rr(1 - \cos \varphi), \quad \frac{\partial M_g}{\partial R} = r(1 - \cos \varphi)$$

– w przedziale 2 ($0 \leq x \leq 2r$)

$$M_g = R(r+x) - Px, \quad \frac{\partial M_g}{\partial R} = r+x$$

Stosując twierdzenie Menabrei

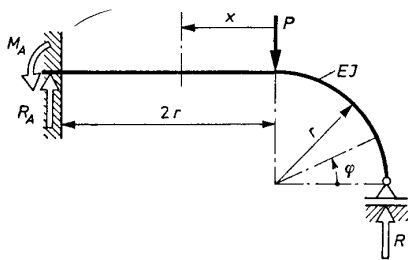
$$\frac{\partial V}{\partial R} = 0 = \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} Rr(1 - \cos \varphi)^2 r d\varphi + \frac{1}{EJ} \int_0^{2r} [R(r+x) - Px](r+x) dx$$

otrzymujemy

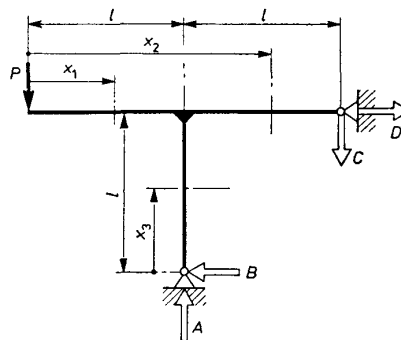
$$R = \frac{56}{80 + 9\pi}P = 0,517P$$

Z warunków równowagi wynika, że pozostałe reakcje wynoszą

$$R_A = 0,483P, \quad M_A = 0,449Pr$$



Rys. 16.4. Do zadania 16.4



Rys. 16.5. Do zadania 16.5

Zadanie 16.5. Obliczyć ugięcie pod siłą P ramy pokazanej na rys. 16.5.

Rozwiązanie. Jako wielkość statycznie niewyznaczalną obieramy reakcję B . Reakcję A musimy wyrazić za pomocą obciążenia i reakcji B , zatem $A = 2P - B$.

Przedział 1 ($0 \leq x_1 \leq l$)

$$M_{g1} = -Px, \quad \frac{\partial M_{g1}}{\partial B} = 0$$

Przedział 2 ($0 \leq x_2 \leq 2l$)

$$M_{g2} = -Px + A(x - l) + Bl = Px - Bx - 2Pl + 2Bl, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial B} = 2l - x$$

Przedział 3 ($0 \leq x_3 \leq l$)

$$M_{g3} = Bx, \quad \frac{\partial M_{g3}}{\partial B} = x$$

Stosujemy twierdzenie Menabrei

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial B} = 0 &= \frac{1}{EJ} \int_0^l 0 \cdot dx + \frac{1}{EJ} \int_l^{2l} (Px - Bx - 2Pl + 2Bl)(2l - x) dx + \\ &+ \frac{1}{EJ} \int_0^l Bxx dx \end{aligned}$$

stąd $B = \frac{1}{2}P$. Ugięcie f znajdujemy z twierdzenia Castigliana $f = \partial V / \partial P$, podstawiając do wyrażenia na energię obliczoną wartość reakcji B .

$$M_{g1} = -Px, \quad \frac{\partial M_{g1}}{\partial P} = -x$$

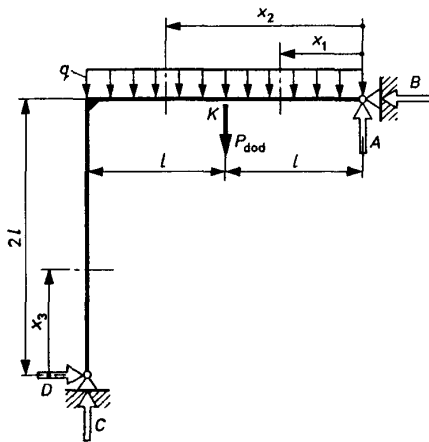
$$M_{g2} = \frac{1}{2}Px - Pl, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial P} = \frac{x}{2} - l$$

$$M_{g3} = \frac{Px}{2}, \quad \frac{\partial M_{g3}}{\partial P} = \frac{x}{2}$$

$$f = \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{EJ} \left[\int_0^l (-Px)(-x) dx + \int_l^{2l} \left(\frac{Px}{2} - Pl \right) \left(\frac{x}{2} - l \right) dx + \int_0^l \frac{Px}{2} \frac{x}{2} dx \right] =$$

$$= \frac{Pl^3}{2EJ}$$

Zadanie 16.6. Obliczyć składową pionową przemieszczenia punktu K ramy pokazanej na rys. 16.6.



Rys. 16.6. Do zadania 16.6

Rozwiązanie. W punkcie K przykładamy siłę $P_{dod} = 0$. Za wielkość statycznie niewyznaczalną przyjmujemy reakcję A , zatem

$$B = ql - A + \frac{1}{2}P_{dod}$$

Przedział 1 ($0 \leq x_1 \leq l$)

$$M_{g1} = Ax - \frac{1}{2}qx^2, \quad \frac{\partial M_{g1}}{\partial A} = x$$

Przedział 2 ($l \leq x_2 \leq 2l$)

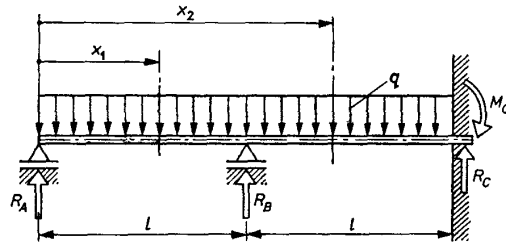
$$M_{g2} = Ax - \frac{1}{2}qx^2 - P_{dod}(x - l), \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial A} = x$$

Przedział 3 ($0 \leq x_3 \leq 2l$)

$$M_{g3} = Ax - qlx - \frac{1}{2}P_{dod}x, \quad \frac{\partial M_{g3}}{\partial A} = x$$

Z twierdzenia Menabrei znajdujemy $A = \frac{7}{8}ql + \frac{13}{32}P_{dod}$. Podstawiamy tę wartość do wyrażeń na momenty gnące i, stosując twierdzenie Castigliana, wyznaczamy $f = \frac{\partial V}{\partial P_{dod}} = \frac{7}{48} \frac{ql^4}{EJ}$.

Zadanie 16.7. Obliczyć reakcje podporowe belki przedstawionej na rys. 16.7.



Rys. 16.7. Do zadania 16.7

Rozwiązanie. Belka jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalna. Z równań statyki

$$\sum P_y = R_A + R_B + R_C - 2ql = 0 \quad \text{oraz} \quad \sum M_C = M_0 + R_B l + R_A \cdot 2l - 2ql^2 = 0$$

nie można w sposób bezpośredni wyznaczyć żadnej reakcji. Przyjmijmy więc za wielkości statycznie niewyznaczalne reakcje R_A oraz R_B , a wówczas ich wartości wyznaczymy z twierdzenia Menabrei

$$\frac{\partial V}{\partial R_A} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial V}{\partial R_B} = 0$$

Przedział 1 ($0 \leq x \leq l$)

$$M_g = R_A x - \frac{1}{2}qx^2, \quad \frac{\partial M_g}{\partial R_A} = x, \quad \frac{\partial M_g}{\partial R_B} = 0$$

Przedział 2 ($l \leq x \leq 2l$)

$$M_g = R_A x + R_B(x-l) - \frac{1}{2}qx^2, \quad \frac{\partial M_g}{\partial R_A} = x, \quad \frac{\partial M_g}{\partial R_B} = x-l$$

Z twierdzenia Menabrei mamy

$$\frac{\partial V}{\partial R_A} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left(R_A x - \frac{1}{2}qx^2 \right) x dx + \frac{1}{EJ} \int_l^{2l} \left[R_A x + R_B(x-l) - \frac{1}{2}qx^2 \right] x dx = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial R_B} = \frac{1}{EJ} \int_0^l 0 \cdot dx + \frac{1}{EJ} \int_l^{2l} \left[R_A x + R_B (x-l) - \frac{1}{2} q x^2 \right] (x-l) dx = 0$$

Po scałkowaniu otrzymujemy układ równań

$$\frac{8}{3} R_A + \frac{5}{6} R_B = 2ql$$

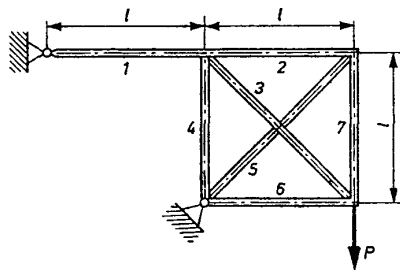
$$\frac{5}{6} R_A + \frac{1}{3} R_B = \frac{17}{24} ql$$

Stąd $R_A = \frac{11}{28} ql$ oraz $R_B = \frac{8}{7} ql$.

Pozostałe reakcje wynoszą

$$R_C = \frac{13}{28} ql \quad \text{oraz} \quad M_0 = \frac{1}{14} ql^2$$

Zadanie 16.8. Obliczyć siły w prętach kratownicy przedstawionej na rys. 16.8.



Rys. 16.8. Do zadania 16.8

Rozwiązanie. Ze statyki można wyliczyć tylko siłę w pręcie 1, wynoszącą $S_1 = P$. Kratownica jest jednokrotnie wewnętrznie statycznie niewyznaczalna (przesztynwniona). Przyjmijmy za niewiadomą statycznie niewyznaczalną siłę $S_5 = X$, rozciągającą pręt oznaczony numerem 5, i zastosujmy twierdzenie Menabrei

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 0 = \frac{1}{EF} \sum_{i=1}^7 S_i \frac{\partial S_i}{\partial X} l_i$$

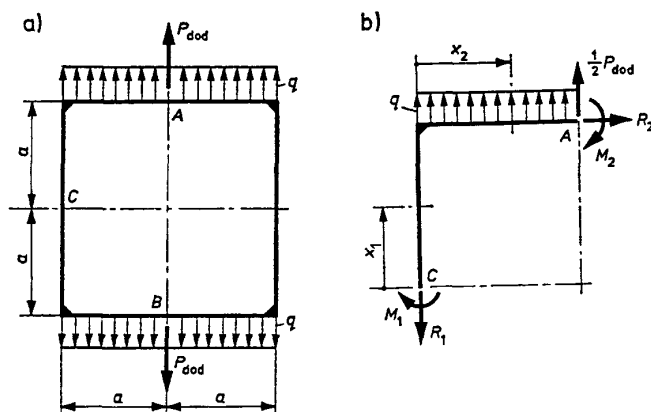
Obliczenia przedstawiono w tabelce.

Z otrzymanej sumy (w tabelce) wynika, że $X = -\frac{P}{\sqrt{2}} = -0,707P$. Wartości sił w pozostałych prętach wynoszą

$$S_1 = P, \quad S_2 = S_7 = \frac{1}{2}P, \quad S_3 = 0,707P, \quad S_4 = S_6 = -\frac{1}{2}P, \quad (S_5 = -0,707P)$$

Nr pręta	S_i	$\frac{\partial S_i}{\partial X}$	l_i	$S_i \frac{\partial S_i}{\partial X} l_i$
1	P	0	l	0
2	$-\frac{X}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	l	$\frac{1}{2}Xl$
3	$P\sqrt{2}+X$	1	$l\sqrt{2}$	$2Pl+Xl\sqrt{2}$
4	$-P-\frac{X}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	l	$\frac{Pl}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}Xl$
5	X	1	$l\sqrt{2}$	$Xl\sqrt{2}$
6	$-P-\frac{X}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	l	$\frac{Pl}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}Xl$
7	$-\frac{X}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	l	$\frac{1}{2}Xl$
			Suma:	$2Xl(1+\sqrt{2})+Pl(2+\sqrt{2})=0$

Zadanie 16.9. Dla ramy pokazanej na rys. 16.9 obliczyć zwiększenie wymiaru AB spowodowane działaniem obciążenia ciągłego q . Sztywności wszystkich prętów ramy są jednakowe i równe EJ .



Rys. 16.9. Do zadania 16.9

Rozwiązanie. Rama ma dwie osie symetrii, można więc rozpatrywać czwartą część ramy (rys. 16.9b). W przekrojach A oraz C siły tnące są równe zero, ze statyki zaś wynika, że $R_1 = qa + \frac{1}{2}P_{dod}$ oraz $R_2 = 0$. Za wielkość statycznie niewyznaczalną przyjmujemy moment M_1 .

Przedział 1 ($0 \leq x_1 \leq a$)

$$M_{g1} = M_1, \quad \frac{\partial M_{g1}}{\partial M_1} = 1$$

Przedział 2 ($0 \leq x_2 \leq a$)

$$M_{g2} = M_1 - \frac{1}{2}qx^2 - R_1x = M_1 - \frac{1}{2}qx^2 - qax - \frac{1}{2}P_{dod}x, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial M_1} = 1$$

Z twierdzenia Menabrei

$$\frac{\partial V}{\partial M_1} = 0 = \frac{4}{EJ} \left[\int_0^a M_1 \cdot 1 \cdot dx + \int_0^a \left(M_1 + \frac{1}{2}qx^2 - qax - \frac{1}{2}P_{dod}x \right) \cdot 1 \cdot dx \right]$$

otrzymujemy

$$M_1 = \frac{1}{6}qa^2 + \frac{1}{8}P_{dod}a$$

Wartość tę wstawiamy do wyrażen na momenty gnące i różniczkujemy względem P_{dod}

$$M_{g1} = \frac{1}{6}qa^2 + \frac{1}{8}P_{dod}a, \quad \frac{\partial M_{g1}}{\partial P_{dod}} = \frac{a}{8}$$

$$M_{g2} = \frac{1}{6}qa^2 + \frac{1}{8}P_{dod}a + \frac{1}{2}qx^2 - qax - \frac{1}{2}P_{dod}x, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial P_{dod}} = \left(\frac{a}{8} - \frac{x}{2} \right)$$

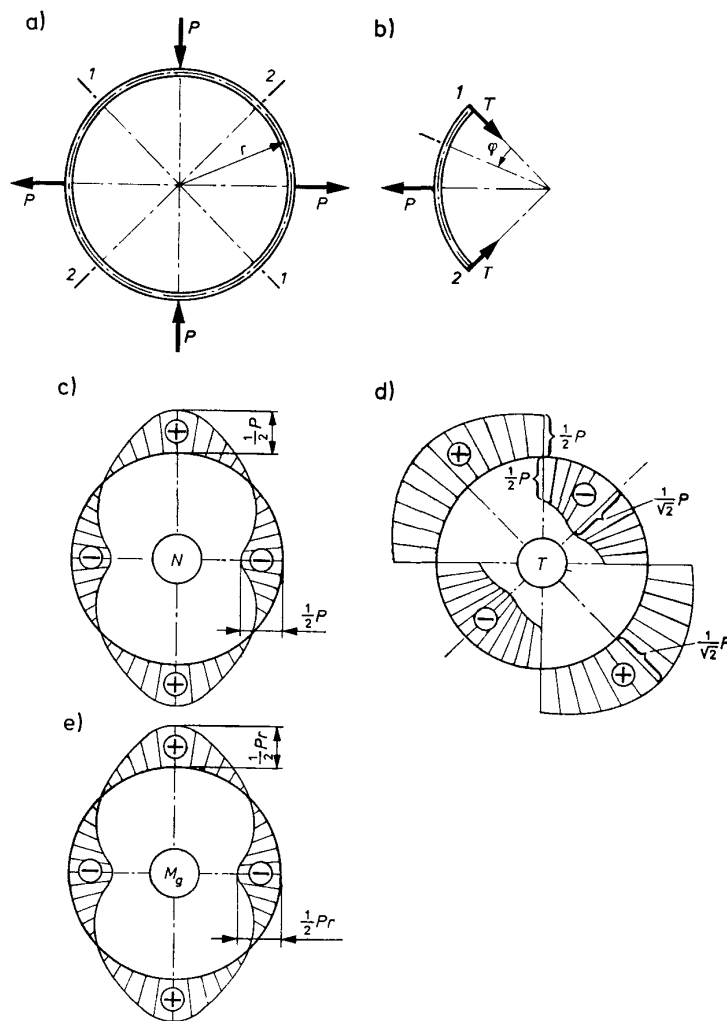
Stosujemy następnie twierdzenie Castigliana, podstawiając $P_{dod} = 0$

$$\begin{aligned} f = \frac{\partial V}{\partial P_{dod}} &= \frac{4}{EJ} \left[\int_0^a \frac{1}{6}qa^2 \frac{a}{8} dx + \int_0^a \left(\frac{1}{6}qa^2 + \frac{1}{2}qx^2 - qax \right) \left(\frac{a}{8} - \frac{x}{2} \right) dx \right] = \\ &= \frac{qa^4}{4EJ} \end{aligned}$$

Zadanie 16.10. Dla pierścienia przedstawionego na rys. 16.10a wykonać wykres momentów gnących.

Rozwiązanie. Osie 1 i 2 są osiami antysymetrii pierścienia, a więc w odpowiednich przekrojach występują wyłącznie siły tnące; jednocześnie oś pozioma jest osią symetrii, zatem siły tnące, przedstawione na rys. 16.10b, są jednakowe. Układ jest statycznie wyznaczalny, siła $T = P/\sqrt{2}$. W przekroju określonym kątem φ dla $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{4}\pi$ siła normalna wynosi

$$N_\varphi = -T \sin \varphi = -\frac{P}{\sqrt{2}} \sin \varphi$$



Rys. 16.10. Do zadania 16.10

siła tnąca

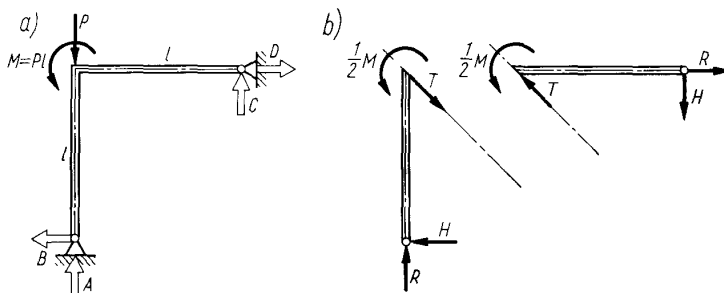
$$T_{\varphi} = +T \cos \varphi = +\frac{P}{\sqrt{2}} \cos \varphi$$

a moment gnący

$$M_g = -Tr \sin \varphi = -\frac{P}{\sqrt{2}} r \sin \varphi$$

Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na rys. 16.10c, d, e.

Zadanie 16.11. Obliczyć reakcje podporowe dla ramy podanej na rys. 16.11a.



Rys. 16.11. Do zadania 16.11

Rozwiązanie. Siłę P przenosimy wzdłuż jej linii działania do przegubu A , a wówczas możemy dla pozostałego układu zastosować zasadę antysymetrii (rys. 16.11b).

Z równań statyki otrzymujemy

$$T = \frac{P}{\sqrt{2}}, \quad R = H = \frac{1}{2}P$$

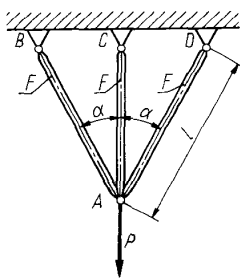
zatem reakcje podporowe ramy (rys. 16.11a) wynoszą

$$B = C = D = \frac{1}{2}P, \quad A = R + P = \frac{3}{2}P$$

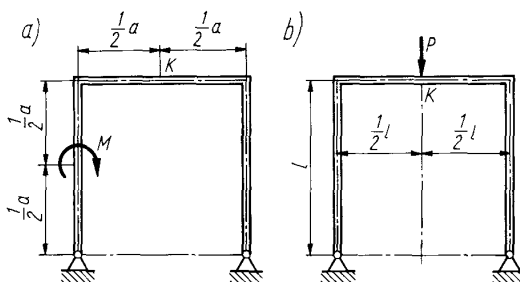
Zadanie 16.12. Dla układu pokazanego na rys. 16.12 wyznaczyć siły w prętach. Dane: P, l, F, α .

ODPOWIEDŹ:

$$S_{AC} = \frac{P}{2 \cos^3 \alpha + 1}, \quad S_{AB} = S_{AD} = \frac{P}{2 \cos \alpha} \left(1 - \frac{1}{2 \cos^3 \alpha + 1} \right)$$



Rys. 16.12. Do zadania 16.12



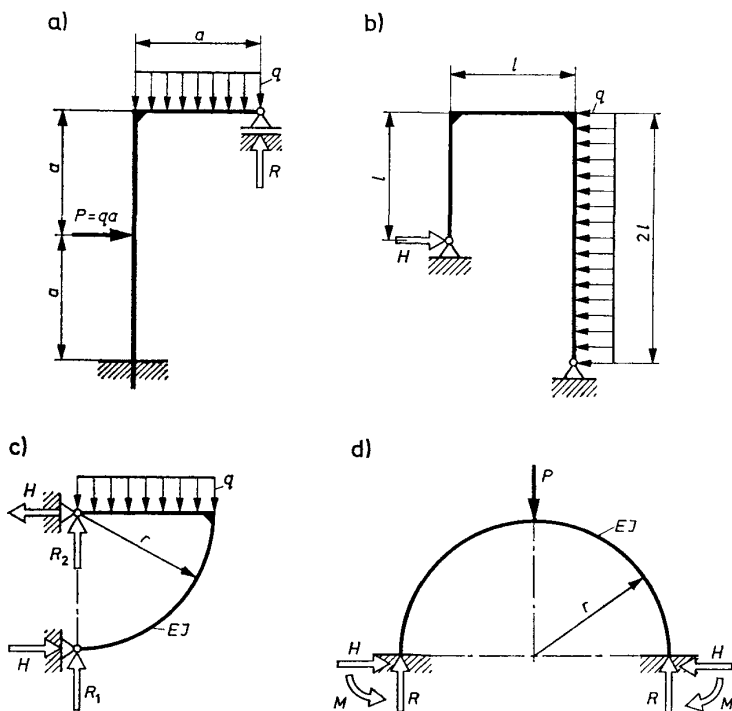
Rys. 16.13. Do zadania 16.13

Zadanie 16.13. Dla ram podanych na rys. 16.13a i b obliczyć składowe pionowe przemieszczeń punktów K.

ODPOWIEDŹ:

$$\text{a) } f_K = \frac{Ma^2}{320EJ}, \quad \text{b) } f_K = \frac{11Pl^3}{960EJ}$$

Zadanie 16.14. Obliczyć reakcje podporowe dla ram pokazanych na rys. 16.14a-d.



Rys. 16.14. Do zadania 16.14

ODPOWIEDŹ:

$$\text{a) } R = \frac{39}{56}qa, \quad \text{b) } H = \frac{13}{16}ql$$

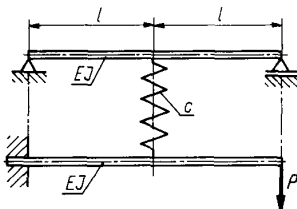
$$\text{c) } H = \frac{1}{2}qr, \quad R_1 = qr \frac{11}{2(3\pi+4)} = 0,410qr$$

$$\text{d) } R = \frac{1}{2}P, \quad H = \frac{4-\pi}{\pi^2-8}P = 0,459P$$

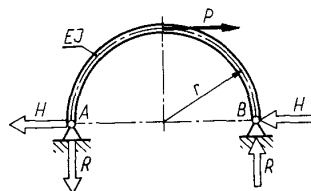
Zadanie 16.15. Obliczyć wartość siły S w sprężynie łączącej dwie belki, pokazanej na rys. 16.15.

ODPOWIEDŹ:

$$S = \frac{5cl^2P}{2(2EJ + cl^3)}$$



Rys. 16.15. Do zadania 16.15

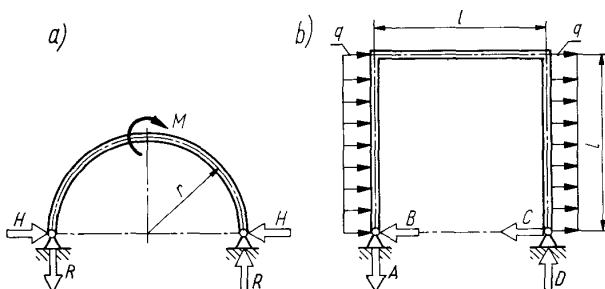


Rys. 16.16. Do zadania 16.16

Zadanie 16.16. Obliczyć reakcje podporowe dla łuku podanego na rys. 16.16.
ODPOWIEDŹ. Oś pionowa łuku jest osią antysymetrii, układ więc staje się zewnętrznie statycznie wyznaczalny. Zaznaczone na rysunku reakcje podporowe wynoszą

$$R = \frac{1}{2}P, \quad H = \frac{1}{2}P$$

Zadanie 16.17. Dla ram podanych na rys. 16.17a i b wyznaczyć reakcje podporowe, stosując zasadę antysymetrii.

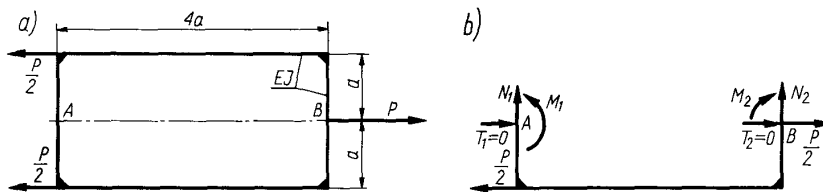


Rys. 16.17. Do zadania 16.17

ODPOWIEDŹ:

$$\text{a) } H = 0, \quad R = \frac{M}{2r}, \quad \text{b) } A = B = C = D = ql$$

Zadanie 16.18. Dla ramy pokazanej na rys. 16.18a wyznaczyć siły wewnętrzne oraz strzałkę ugięcia f w punkcie przyłożenia siły P .

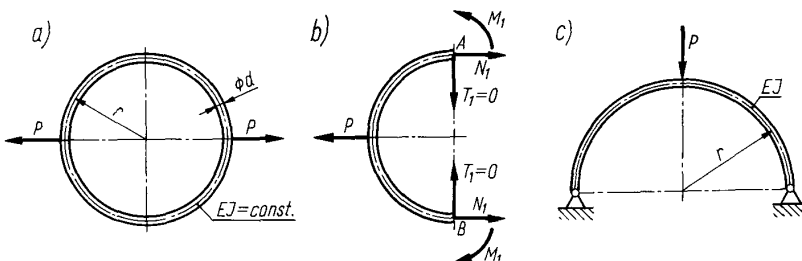


Rys. 16.18. Do zadania 16.18

ODPOWIEDŹ. (Oznaczenia według rys. b).

$$M_1 = -\frac{1}{30}Pa, \quad M_2 = -\frac{23}{60}Pa, \quad f = \frac{13}{120} \frac{Pa^3}{EJ}$$

Zadanie 16.19. Dla ramy podanej na rys. 16.19a i c wykonać wykresy sił wewnętrznych oraz obliczyć strzałkę ugięcia f pod siłą P .



Rys. 16.19. Do zadania 16.19

ODPOWIEDŹ:

– dla ramy na rys. a (oznaczenia wg rys. b)

$$N_1 = 0,5P, \quad T_1 = 0, \quad M_1 = \frac{Pr}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \cong 0,18Pr$$

$$f = 0,148 \frac{Pr^3}{EJ}$$

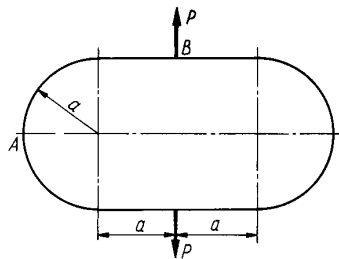
– dla ramy na rys. c

$$f = \frac{Pr^3}{EJ} \left(\frac{3}{8}\pi - 1 - \frac{1}{2\pi} \right) = 0,019 \frac{Pr^3}{EJ}$$

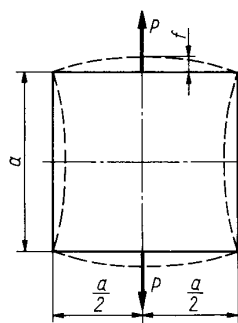
Zadanie 16.20. Wyznaczyć momenty gnące występujące w punktach A i B ramy, która jest obciążona siłami P (rys. 16.20).

ODPOWIEDŹ:

$$M_A \approx -0,4Pa, \quad M_B \approx 0,6Pa$$



Rys. 16.20. Do zadania 16.20



Rys. 16.21. Do zadania 16.21

Zadanie 16.21. Stosując twierdzenie Castigliana i Menabrei, wyznaczyć momenty M w narożach oraz strzałkę ugięcia f dla ramy pokazanej na rys. 16.21. Sztywność wszystkich prętów jest równa EJ .

ODPOWIEDŹ:

$$M = \frac{Pa}{16}, \quad f = \frac{5}{384} \frac{Pa^3}{EJ}$$

Wzór i równania Maxwella-Mohra

17

Wprowadzenie

W układach wielokrotnie statycznie niewyznaczalnych (lub posiadających większą liczbę przedziałów) stosowanie dotychczasowych metod staje się zbyt pracochłonne i w takich przypadkach korzystnie jest stosować *metode Maxwella-Mohra*.

Wyznaczenie przemieszczenia danego punktu K belki wieloprzęsłowej (lub konstrukcji itp.) sprowadza się do wzoru Maxwella-Mohra

$$f_K = \int_i \frac{M_{gi} m_{gi}}{EJ} dx_i \quad (17.1)$$

gdzie: M_{gi} – moment gnący w kolejnym przedziale, wywołany obciążeniem działającym na układ, m_{gi} – moment gnący w tym przedziale od siły uogólnionej jednostkowej $P_K = 1$, przyłożonej w punkcie K (odpowiadającej współrzędnej f_K).

Występujące w powyższym wzorze całki dają się stosunkowo łatwo obliczać *metodą Wereszczagina*, z wykorzystaniem tabl. 17.1.

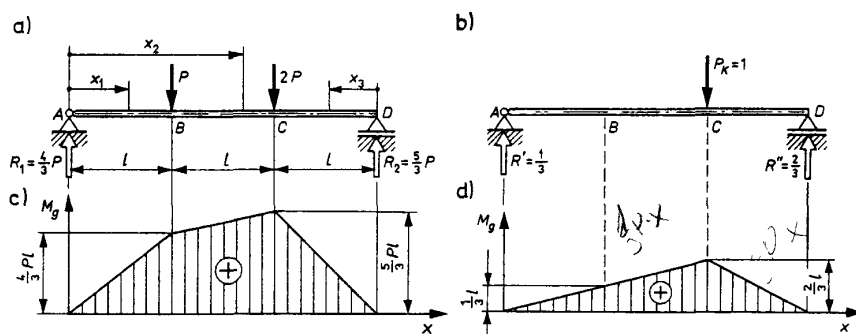
Wyznaczenie reakcji $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$ w układach wielokrotnie statycznie niewyznaczalnych przeprowadza się przy zastosowaniu *równań Maxwella-Mohra* (tzw. *równania kanoniczne metody sił*)

[illegible]

W powyższych równaniach wyrażenia typu δ_{ij} oznaczają

$$\delta_{ij} = \int \frac{m_{gi} m_{gj}}{EJ} \quad (17.3)$$

Zadanie 17.1. Obliczyć ugięcie belki pod siłą $2P$ (rys. 17.1).



Rys. 17.1. Do zadania 17.1

Rozwiązanie. Aby rozwiązać zadanie metodą Maxwella-Mohra, przykładamy w punkcie C belki siłę dodatkową $P_K = 1$ (rys. 17.1b). Momenty gnące od obciążenia rzeczywistego i od siły jednostkowej wynoszą:

– w przedziale 1 ($0 \leq x_1 \leq l$)

$$M_g = \frac{4}{3}Px, \quad m_g = \frac{1}{3}x$$

– w przedziale 2 ($l \leq x_2 \leq 2l$)

$$M_g = \frac{4}{3}Px - P(x - l) = \frac{1}{3}Px + Pl, \quad m_g = \frac{1}{3}x$$

– w przedziale 3 ($0 \leq x_3 \leq l$)

$$M_g = \frac{5}{3}Px, \quad m_g = \frac{2}{3}x$$

Stosując wzór Maxwella-Mohra (17.1), otrzymujemy

$$f = \frac{1}{EJ} \left[\int_0^l \frac{4}{3}Px \cdot \frac{x}{3} dx + \int_l^{2l} \left(\frac{1}{3}Px + Pl \right) \frac{x}{3} dx + \int_0^l \frac{5}{3}Px \cdot \frac{2}{3}x dx \right] = \frac{23}{18} \frac{Pl^3}{EJ}$$

Powyższe całki wyznaczono sposobem Wereszczagina, korzystając z tabl. 17.1.

Przedział 1 (poz. 3 kolumna 5)

$$C_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}Pl \cdot \frac{1}{3}ll = \frac{4}{27}Pl^3$$

Przedział 2 (poz. 4 kolumna 6)

$$C_2 = \frac{1}{6}l \left[\frac{4}{3}Pl \left(2 \cdot \frac{1}{3}l + \frac{2}{3}l \right) + \frac{5}{3}Pl \left(\frac{1}{3}l + 2 \cdot \frac{2}{3}l \right) \right] = \frac{41}{54}Pl^3$$

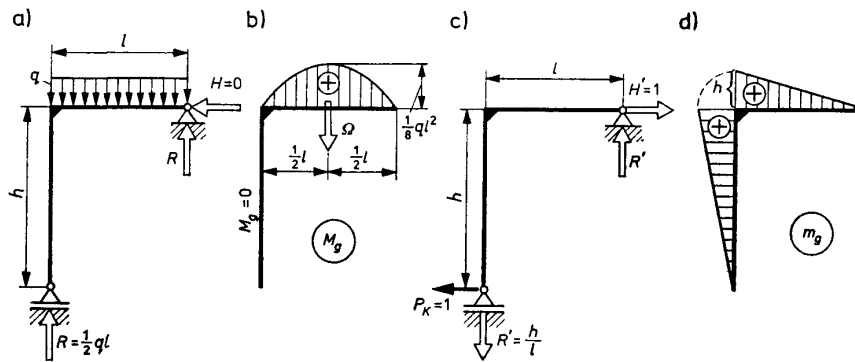
Przedział 3 (poz. 2 kolumna 4)

$$C_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} Pl \cdot \frac{2}{3} l = \frac{10}{27} Pl^3$$

$$f = \frac{1}{EJ} (C_1 + C_2 + C_3) = \frac{Pl^3}{EJ} \left(\frac{4}{27} + \frac{41}{54} + \frac{10}{27} \right) = \frac{23}{18} \frac{Pl^3}{EJ}$$

Ten sam wynik uzyskaliśmy, stosując twierdzenie Castigliana (zad. 15.3).

Zadanie 17.2. Stosując metodę Maxwella-Mohra, obliczyć składową poziomą przemieszczenia podpory przesuwnej dla ramy z zad. 15.5.



Rys. 17.2. Do zadania 17.2

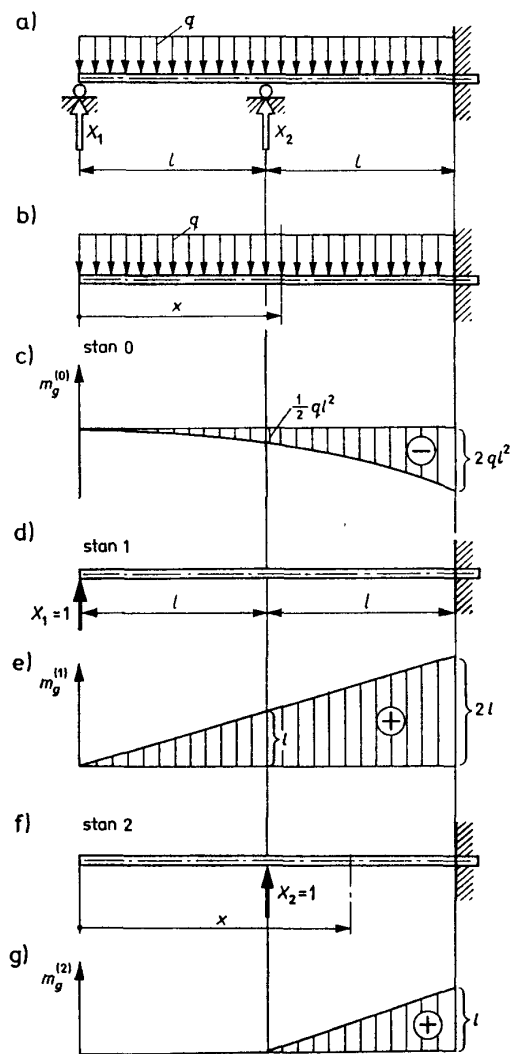
Rozwiązanie. Wykres momentów gnących M_g od obciążenia ciągłego q przedstawiono na rys. 17.2b, a od siły jednostkowej (rys. 17.2c) – na rys. 17.2d. W przecie pionowym $M_g = 0$, a więc całka we wzorze Maxwella-Mohra dla tego przedziału jest równa zero. Dla pręta poziomego mamy (poz. 2 kolumna 8 tabl. 17.1)

$$f = \frac{1}{EJ} \left(0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} ql^2 hl \right) = \frac{ql^3 h}{24EJ}$$

Zadanie 17.3. Obliczyć reakcje podporowe belki, pokazanej na rys. 17.3a, stosując równania Maxwella-Mohra oraz sposób Wereszczagina.

Rozwiązanie. Belka jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalna. Jako statycznie niewyznaczalne przyjmujemy reakcje X_1 i X_2 . Stan 0, 1 i 2 oraz odpowiadające im wykresy momentów gnących przedstawiono na rys. 17.3b-g. Dla układu dwukrotnie statycznie niewyznaczalnego równania Maxwella-Mohra (17.2) mają postać

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \delta_{10} &= 0 \\ X_2 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \delta_{20} &= 0 \end{aligned} \quad (17.4)$$



Rys. 17.3. Do zadania 17.3

Współczynniki w powyższych równaniach obliczymy za pomocą tabl. 17.1:

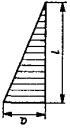
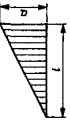
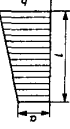
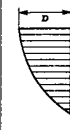
δ_{11} – dla rys. 17.3e, poz. 3 kolumna 5

$$\delta_{11} = \frac{1}{3} \cdot 2l \cdot 2l \cdot 2l = \frac{8}{3} l^3$$

δ_{12} – dla rys. 17.3e i g, poz. 4 kolumna 5

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0 + \frac{1}{6} l (l + 2 \cdot 2l) l = \frac{5}{6} l^3$$

Tablica 17.1. Wartość całek $\int_0^l M_g m_g dx = \Omega x_C$ dla kilku typowych przypadków obciążeń

Lp.	M_g m_g	Parabola drugiego stopnia								
										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1		adl	$\frac{1}{2}adl$	$\frac{1}{2}adl$	$\frac{1}{2}(a+b)dl$	$\frac{1}{2}adl$	$\frac{2}{3}adl$	$\frac{1}{3}adl$	$\frac{2}{3}adl$	
2		$\frac{1}{2}adl$	$\frac{1}{3}adl$	$\frac{1}{6}adl$	$\frac{1}{6}(2a+b)dl$	$\frac{1}{6}ad(l+c)$	$\frac{1}{3}adl$	$\frac{1}{4}adl$	$\frac{1}{4}adl$	
3		$\frac{1}{2}adl$	$\frac{1}{6}adl$	$\frac{1}{3}adl$	$\frac{1}{6}(a+2b)dl$	$\frac{1}{6}ad(l+b)$	$\frac{1}{3}adl$	$\frac{1}{12}adl$	$\frac{5}{12}adl$	
4		$\frac{1}{2}a(d+e)l$	$\frac{1}{6}a(2d+e)l$	$\frac{1}{6}a(d+2e)l$	$\frac{1}{6}[a(2d+e)+b(d+2e)]$	$\frac{1}{6}a[d(l+c)+e(l+b)]$	$\frac{1}{3}a(d+e)l$	$\frac{1}{12}a(3d+e)$	$\frac{1}{12}a(3d+5e)$	
5		adl	$\frac{1}{4}adl$	$\frac{1}{4}adl$	$\frac{1}{4}(a+b)dl$	$\frac{1}{2}adl$	$\frac{1}{2}adl$	$\frac{1}{6}adl$	$\frac{1}{2}adl$	

δ_{10} – dla rys. 17.3c i e, poz. 2 kolumna 9

$$\delta_{10} = \frac{1}{4} (-2ql^2) \cdot 2l \cdot 2l = -2ql^4$$

δ_{22} – dla rys. 17.3g, poz. 3 kolumna 5

$$\delta_{22} = 0 + \frac{1}{3} lll = \frac{1}{3} l^3$$

W tablicy 17.1 nie ma schematu do obliczenia współczynnika δ_{20} , należy więc obliczyć całkę

$$\delta_{20} = \int_l m_g^{(0)} m_g^{(2)} dx$$

Z rysunku 17.3b dla całej długości belki moment $m_g^{(0)} = -\frac{1}{2}qx^2$, dla lewej połowy belki $m_g^{(2)} = 0$ (rys. 17.3g), natomiast dla prawej połowy $m_g^{(2)} = 1 \cdot (x-l)$, zatem

$$\delta_{20} = 0 + \int_l^{2l} \left(-\frac{1}{2}qx^2 \right) (x-l) dx = -\frac{17}{24}ql^4$$

Równania Maxwella-Mohra (po skróceniu przez l^3) mają postać

$$X_1 \cdot \frac{8}{3} + X_2 \cdot \frac{5}{6} - 2ql = 0$$

$$X_1 \cdot \frac{5}{6} + X_2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{17}{24}ql = 0$$

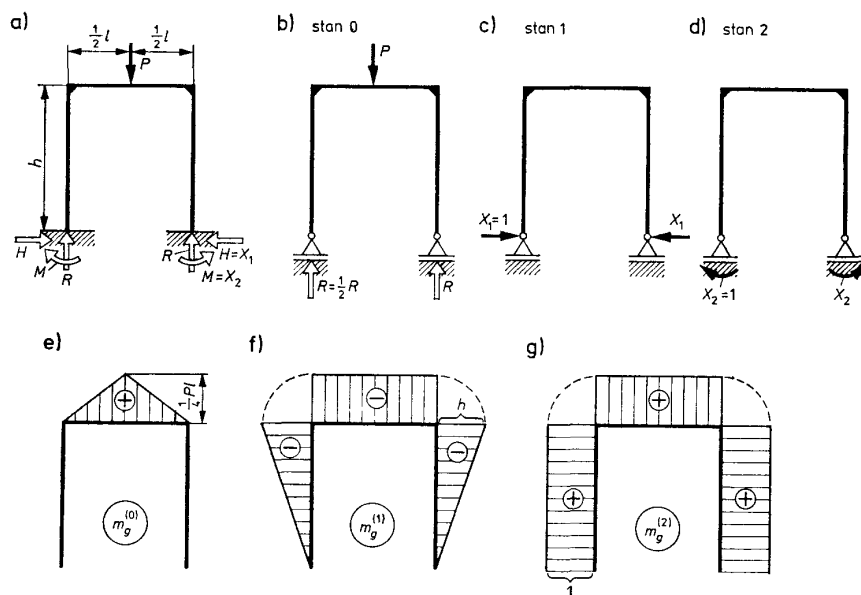
Identyczny układ równań otrzymano w zad. 16.7. Rozwiązaniem układu jest $X_1 = \frac{11}{28}ql$ oraz $X_2 = \frac{8}{7}ql$.

Zadanie 17.4. Obliczyć reakcje podporowe dla ramy pokazanej na rys. 17.4.

Rozwiązanie. Układ jest symetryczny; z równania równowagi wynika, że $R = \frac{1}{2}P$. Jako reakcje statycznie niewyznaczalne pozostają $H = X_1$ oraz $M = X_2$. Stan 0, 1 i 2 oraz odpowiadające im wykresy momentów gnących są pokazane na rys. 17.4b-g. Współczynniki do równań Maxwella-Mohra obliczamy na podstawie tabl. 17.1

$$\delta_{11} = 2 \cdot \frac{1}{3} hhh + hhl = h^2 \left(\frac{2}{3}h + l \right) \quad \begin{array}{l} \text{(poz. 3 kolumna 5} \\ \text{oraz poz. 1 kolumna 3)} \end{array}$$

$$\delta_{12} = 2 \cdot \frac{1}{2} (-h)lh + 1(-h)l = -h(h+l) \quad \begin{array}{l} \text{(poz. 3 kolumna 3} \\ \text{oraz poz. 1 kolumna 3)} \end{array}$$



Rys. 17.4. Do zadania 17.4

$$\delta_{10} = 2 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot Pl(-h)l = -\frac{1}{8}Pl^2h \text{ (poz. 1 kolumna 7)}$$

$$\delta_{22} = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot h + 1 \cdot 1 \cdot l = 2h + l \text{ (poz. 1 kolumna 3)}$$

$$\delta_{20} = 2 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot Pl \cdot 1 \cdot l = \frac{1}{8}Pl^2 \text{ (poz. 1 kolumna 7)}$$

Po podstawieniu współczynników do równań (17.4)

$$X_1 h^2 \left(\frac{2}{3}h + l \right) - X_2 h(h + l) + \frac{1}{8}Pl^2 h = 0$$

$$-X_1 h(h + l) + X_2 (2h + l) - \frac{1}{8}Pl^2 = 0$$

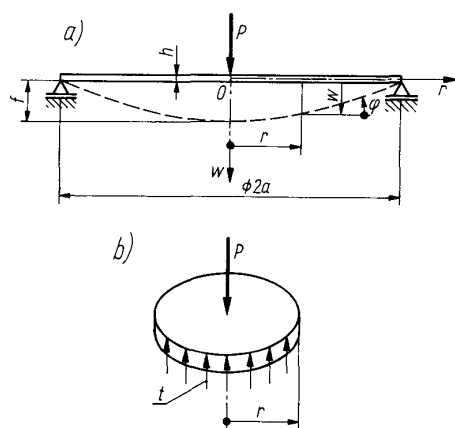
otrzymujemy

$$X_1 = H = \frac{3Pl^2}{8h(h + 2l)} \quad \text{oraz} \quad X_2 = M = \frac{Pl^2}{8(h + 2l)}$$

Zadanie 17.5. Stosując metodę Maxwella-Mohra, wyznaczyć siły wewnętrzne w ramach podanych w zadaniach: 16.7, 16.13 oraz 16.14.

Wprowadzenie

Oznaczenia przyjęte w analizie płyt kołowsymetrycznych podano na rys. 18.1. Pod działaniem osiowosymetrycznego obciążenia na obwodzie określonym promieniem r punkty powierzchni środkowej płyty doznają przemieszczenia w , zaś styczna do linii ugięcia tworzy z poziomem kąt φ (rys. 18.1).



Rys. 18.1. Płyta swobodnie podparta na obwodzie i obciążona siłą P

Na obwodzie wyciętego z płyty krążka o promieniu r działają siły tnące t , momenty gnące promieniowe m_r oraz obwodowe m_t . Wielkości te dotyczą jednostki długości obwodu krążka i wynoszą

$$m_r = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) \quad (18.1)$$

$$m_t = D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right) \quad (18.2)$$

gdzie D – sztywność walcowa płyty (sztywność płytowa)

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (18.3)$$

h – grubość płyty.

Jednostkową siłę tnącą t oblicza się z warunku równowagi krążka o promieniu r . Dla płyty obciążonej osiowo działającą siłą P (rys. 18.1b) siła tnąca wynosi

$$t = \frac{P}{2\pi r} \quad (18.4)$$

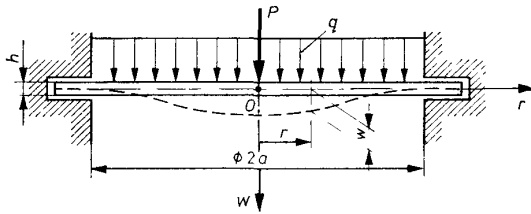
Równanie linii ugięcia powierzchni środkowej płyty kołowej ma postać

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = -\frac{t}{D} \quad (18.5)$$

Naprężenia w płytach (promieniowe lub obwodowe) oblicza się ze wzoru

$$\sigma = \frac{6m}{h^2} \quad (18.6)$$

Zadanie 18.1. Dana jest płyta kołowsymetryczna utwierdzona na brzegach i obciążona w środku siłą P oraz obciążeniem q (N/mm²) rozłożonym równomiernie na całej powierzchni płyty, jak podano na rys. 18.2. Wyznaczyć strzałkę ugięcia f tej płyty.



Rys. 18.2. Do zadania 18.1

Rozwiązanie. Z warunku równowagi wyciętego z płyty krążka o promieniu r znajdujemy (analogicznie do zależności 18.4)

$$t = \frac{qr}{2} + \frac{P}{2\pi r} \quad (18.7)$$

Po podstawieniu tej wartości do równania (18.5) mamy

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = -\frac{qr}{2D} - \frac{P}{2\pi Dr}$$

po scałkowaniu zaś otrzymamy

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{qr^2}{4D} - \frac{P}{2\pi D} \ln r + C_1$$

Po pomnożeniu obu stron tego równania przez r i ponownym scałkowaniu otrzymujemy

$$r \frac{dw}{dr} = -\frac{qr^4}{16D} - \frac{Pr}{2\pi D} \left(\frac{r^2 \ln r}{2} - \frac{r^2}{4} \right) + C_1 \frac{r^2}{2} + C_2$$

stąd

$$\varphi = \frac{dw}{dr} = -\frac{qr^3}{16D} - \frac{Pr}{8\pi D} (2 \ln r - 1) + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r} \quad (18.8)$$

Po ponownym scałkowaniu mamy

$$w = -\frac{qr^4}{64D} - \frac{Pr^2}{8\pi D} (\ln r - 1) + C_1 \frac{r^2}{4} - C_2 \ln r + C_3 \quad (18.9)$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych. Tak więc dla płyty przedstawionej na rys. 18.2 kąty ugięcia w środku i na brzegu płyty są równe zero

$$(\varphi)_{r=0} = 0, \quad (\varphi)_{r=a} = 0$$

Po podstawieniu tych warunków do równania (18.8) znajdujemy

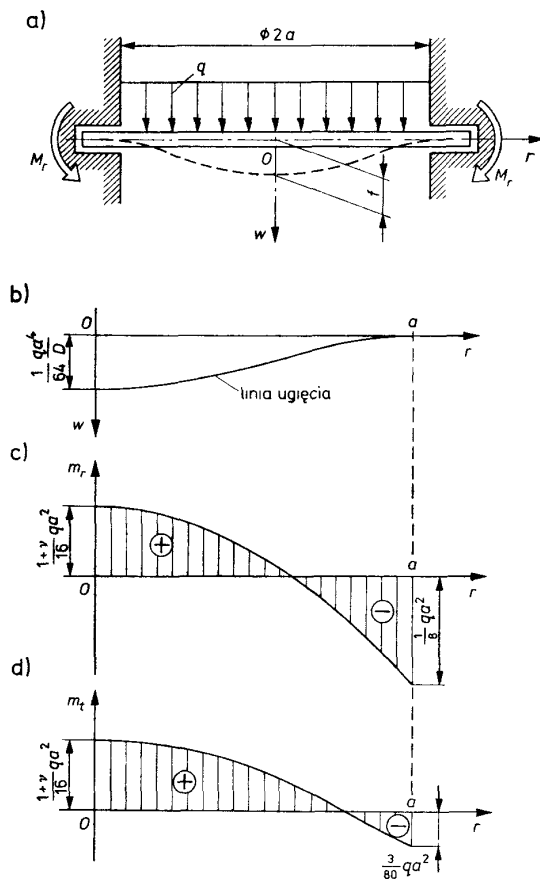
$$C_1 = \frac{qa^2}{8D} + \frac{P}{4\pi D} (2 \ln a - 1), \quad C_2 = 0 \quad (18.10)$$

Stałą całkowania C_3 wyznaczamy z warunku, że ugięcie na brzegu płyty jest równe zero: $(w)_{r=a} = 0$. Stała ta jest jednocześnie równa strzałce ugięcia f środka płyty i wynosi (z równania (18.9))

$$C_3 = f = (w)_{r=0} = -\frac{qa^4}{64D} - \frac{Pa^2}{16\pi D} \quad (18.11)$$

Po zrózniczkowaniu równania (18.8) i podstawieniu do wzorów (18.1) i (18.2) otrzymujemy wyrażenie na momenty gnące w płycie, a ze wzoru (18.6) – wartości naprężeń.

Zadanie 18.2. Dla płyty kołowsymetrycznej utwierdzonej na brzegach, podanej działaniu równomiernie rozłożonego obciążenia q (N/mm²) – podanej na rys. 18.3a – narysować przebieg linii ugięcia powierzchni środkowej, podać wykresy – jako funkcję promienia r – momentów promieniowych m_r i momentów obwodowych m_t oraz wyznaczyć największe naprężenia σ_{max} .



Rys. 18.3. Do zadania 18.2

Rozwiązanie. Równanie linii ugięcia powierzchni środkowej płyty otrzymamy z wyrażenia (18.9) dla $P = 0$ i stałych całkowania określonych wzorami (18.10) i (18.11)

$$w = -\frac{q}{64D} (a^2 - r^2)^2$$

Przebieg linii ugięcia pokazano na rys. 18.3b.

Po dwukrotnym zróżniczkowaniu powyższego równania otrzymujemy

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{q}{16D} (a^2 - 3r^2)$$

Po podstawieniu tej zależności do wzorów (18.1) i (18.2) znajdujemy

$$m_r = \frac{1}{16} q [a^2 (1 + \nu) - r^2 (3 + \nu)]$$

$$m_t = \frac{1}{16}q[a^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)]$$

Wykresy momentów gnących jako funkcje promienia r pokazano na rys. 18.3c i d. Na brzegu płyty, tj. dla $r = a$, momenty te wynoszą

$$(m_r)_{r=a} = M_r = -\frac{1}{8}qa^2, \quad (m_t)_{r=a} = M_t = -\nu\frac{1}{8}qa^2 = \nu M_r$$

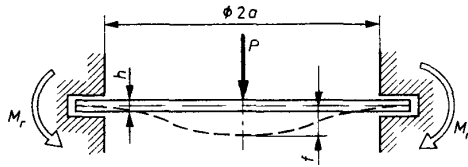
natomiast w środku płyty (dla $r = 0$)

$$(m_r)_{r=0} = (m_t)_{r=0} = M_0 = \frac{qa^2}{16}(1+\nu), \quad f = -\frac{qa^4}{64D}$$

Największe naprężenia występują na brzegu płyty i wynoszą

$$\sigma_{max} = \frac{6M_r}{h^2} = \frac{3qa^2}{4h^2}$$

Zadanie 18.3. Wyznaczyć naprężenia maksymalne w płycie kołowsymetrycznej utwierdzonej na brzegach i obciążonej w środku siłą skupioną P (rys. 18.4).



Rys. 18.4. Do zadania 18.3

Rozwiązanie. Podobnie jak w przykładzie poprzednim, znajdujemy

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{P}{4\pi D} \left(\ln \frac{a}{r} - 1 \right), \quad m_r = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{r} - 1 \right],$$

$$m_t = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{a}{r} - \nu \right]$$

Momenty gnące na brzegu płyty (dla $r = a$) i strzałka ugięcia w środku płyty wynoszą

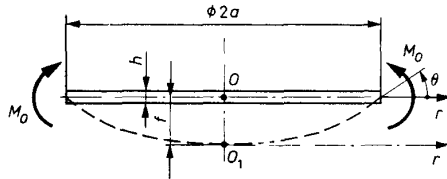
$$M_r = -\frac{P}{4\pi}, \quad M_t = -\frac{\nu P}{4\pi} = \nu M_r, \quad f = -\frac{Pa^2}{16\pi D}$$

Z otrzymanych zależności na momenty gnące M_r i M_t wynika, że momenty te, a więc i naprężenia, w środku płyty (tj. dla $r = 0$) są nieskończenie duże. Wynik ten otrzymujemy przy założeniu, że siła P jest przyłożona w jednym punkcie, a więc na obszarze o promieniu $r = 0$. W rzeczywistości siła P zajmuje pewien

obszar i naprężenia maksymalne w środku płyty obciążonej siłą skupioną określa się wzorem przybliżonym

$$\sigma_{max} = \frac{P}{h^2} (1 + \nu) \left(0,485 \ln \frac{a}{r} + 0,52 \right)$$

Zadanie 18.4. Wyznaczyć naprężenia maksymalne, strzałkę ugięcia f oraz kąt θ nachylenia brzegów płyty o grubości h i promieniu a (rys. 18.5), poddanej czystemu zginaniu momentami M_0 przyłożonymi na obwodzie płyty (natężenie momentów M_0 wynosi $N \cdot m/m$ lub $kG \cdot cm/cm$).



Rys. 18.5. Do zadania 18.4

Rozwiązanie. Do równań płyty kołowsymetrycznej (18.8) i (18.9) podstawiamy $P = 0$ oraz $q = 0$ i otrzymujemy

$$\varphi = \frac{1}{2} C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad w = C_1 \frac{r^2}{4} - C_2 \ln r + C_3 \quad (a)$$

Z warunku $(\varphi)_{r=0} = 0$ otrzymujemy $C_2 = 0$. Układ współrzędnych możemy przesunąć równolegle z punktu O do punktu O_1 (rys. 18.5), a wówczas $(w)_{x=0} = 0$, zatem $C_3 = 0$. Dalszy warunek brzegowy to $(m_r)_{r=a} = M_0$.

Po zróżniczkowaniu zależności (a), dla $C_2 = 0$, otrzymujemy $d\varphi/dr = \frac{1}{2} C_1$, zatem z równania (18.1) otrzymujemy

$$(m_r)_{r=a} = M_0 = D \left(\frac{1}{2} C_1 + \nu \frac{1}{2} C_1 \right)$$

Stąd

$$C_1 = \frac{2M_0}{D(1+\nu)}$$

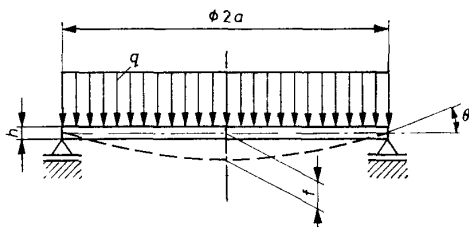
Po podstawieniu tej zależności do wzoru (a), kładąc $r = a$, dla płyty pokazanej na rys. 18.5 otrzymujemy

$$f = \frac{M_0 a^2}{2D(1+\nu)}, \quad \theta = \frac{M_0 a}{D(1+\nu)}, \quad \sigma_{max} = \frac{6M_0}{h^2}$$

Ponieważ w danym przypadku zawsze $m_r = m_t = M_0$, promienie krzywizn są jednakowe $\rho_1 = \rho_2$; powierzchnia środkowa płyty przyjmuje więc kształt czaszy kulistej o promieniu

$$\rho = \frac{2}{C_1} = \frac{D(1+\nu)}{M_0}$$

Zadanie 18.5. Wyznaczyć strzałkę f i kąt θ ugięcia płyty swobodnie podpartej na brzegach i obciążonej na powierzchni równomiernie rozłożonym obciążeniem q (rys. 18.6).



Rys. 18.6. Do zadania 18.5

Rozwiązanie. Do równań (18.9) i (18.8) podstawiamy $P = 0$. Z warunków brzegowych

$$(\varphi)_{r=0} = 0, \quad (w)_{r=a} = 0, \quad (m_r)_{r=a} = 0$$

otrzymujemy

$$f = \frac{(5+\nu)qa^4}{64D(1+\nu)}, \quad \theta = \frac{qa^3}{8D(1+\nu)}, \quad \sigma_{\max} = \frac{3(3+\nu)}{8} \frac{qa^2}{h^2}$$

Powyższe zależności można również otrzymać jako superpozycję płyt pokazanych na rys. 18.3 i 18.5 dla $M_r = M_0 = \frac{1}{8}qa^2$.

Zadanie 18.6. Wyznaczyć strzałkę ugięcia f płyty przedstawionej na rys. 18.7.

Rozwiązanie. Z warunku równowagi środkowej części płyty o promieniu r (dla $a \leq r \leq 2a$) otrzymujemy

$$t = \frac{1}{2}qr - \frac{qa^2}{2r}$$

i wstawiamy do równania (18.5). Z warunków brzegowych

$$(w)_{r=2a} = 0, \quad (m_r)_{r=a} = 0, \quad (m_r)_{r=2a} = 0$$

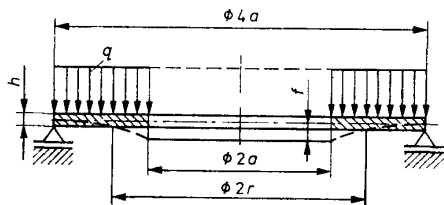
po wykonaniu obliczeń dla $\nu = 0,3$ otrzymujemy

$$f = (w)_{r=a} = 10,62 \frac{qa^4}{Eh^2}$$

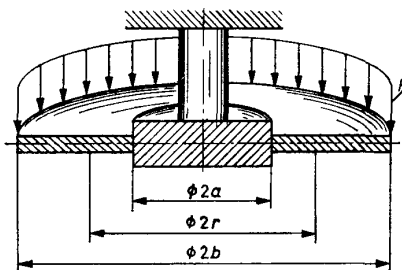
Zadanie 18.7. Określić wartość siły tnącej t oraz podać warunki brzegowe do równań (18.9) i (18.8) dla płyty pokazanej na rys. 18.8.

ODPOWIEDŹ:

$$t = \frac{Pb}{r}, \quad (w)_{r=a} = 0, \quad (\varphi)_{r=a} = 0, \quad (m_r)_{r=b} = 0$$

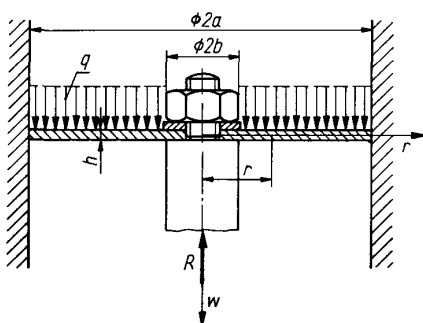


Rys. 18.7. Do zadania 18.6



Rys. 18.8. Do zadania 18.7

Zadanie 18.8. Wyznaczyć naprężenia maksymalne w tłoku, przedstawionym na rys. 18.9, poddanym działaniu ciśnienia q .



Rys. 18.9. Do zadania 18.8

Rozwiązanie. Ze statyki, z warunku równowagi krążka o promieniu r otrzymujemy

$$t = \frac{qr}{2} - \frac{qa^2}{2r}$$

Podstawiamy wartość t do równania (18.9) oraz (18.8) i otrzymujemy

$$\varphi = -\frac{qr^3}{16D} + \frac{qa^2r}{8D}(2\ln r - 1) + \frac{C_1r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

$$w = \frac{qr^4}{64D} - \frac{qa^2r^2}{8D}(\ln r - 1) - \frac{C_1r^2}{4} - C_2\ln r + C_3$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych

$$(w)_{r=b} = 0, \quad (\varphi)_{r=b} = 0, \quad (m_r)_{r=a} = 0$$

Rury i zbiorniki ciśnieniowe

19

Wprowadzenie

Zbiorniki lub rury traktujemy jako cienkościenne, jeżeli ich promienie główne krzywizn r są co najmniej pięć razy większe od ich grubości g ($r \geq 5g$).

Rozważania ograniczymy do cienkościennych zbiorników (naczyń) osiowo-symetrycznych poddanych działaniu ciśnienia wewnętrznego p . Dla takich zbiorników naprężenia główne – błonowe związane są zależnością

$$\frac{\sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_2}{r_2} = \frac{p}{g} \quad (19.1)$$

gdzie: r_1 i r_2 – promienie główne krzywizny powłoki, tj. powierzchni utworzonej z punktów jednakowo oddalonych od wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni zbiornika, σ_1 – naprężenia obwodowe, σ_2 – naprężenia południkowe (wzdłużne).

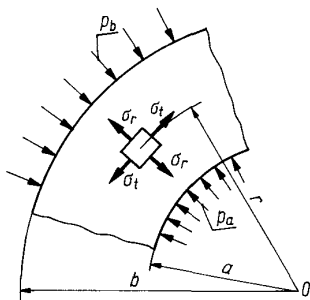
Jeżeli oprócz naprężeń błonowych występują w powłoce naprężenia od zginania, to musimy je dodatkowo uwzględnić.

W przypadku rur grubościennych ($r < 5g$) poddanych działaniu ciśnienia wewnętrznego p_a i zewnętrznego p_b naprężenia promieniowe σ_r i obwodowe σ_t , występujące na dowolnym promieniu r , określone są wzorami (rys. 19.1)

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_b b^2 - p_a a^2}{a^2 - b^2} - \frac{p_b - p_a}{a^2 - b^2} \frac{a^2 b^2}{r^2} \\ \sigma_t &= \frac{p_b b^2 - p_a a^2}{a^2 - b^2} + \frac{p_b - p_a}{a^2 - b^2} \frac{a^2 b^2}{r^2} \end{aligned} \quad (19.2)$$

zaś przemieszczenie promieniowe (wydłużenie promienia r)

$$u = \frac{1}{E(a^2 - b^2)} \left[r(p_b b^2 - p_a a^2)(1 - \nu) + \frac{1}{r}(p_b - p_a)a^2 b^2(1 + \nu) \right] \quad (19.3)$$



Rys. 19.1. Naprężenia w rurze grubościennej poddanej działaniu ciśnienia wewnętrznego p_a i zewnętrznego p_b

Zadanie 19.1. Obliczyć wymaganą grubość g blachy zbiornika walcowego zamkniętego dnami i poddanego działaniu ciśnienia wewnętrznego p . Obliczyć również przyrost objętości zbiornika pod wpływem tego ciśnienia, mając dane: promień $r = 1$ m, długość $l = 4$ m, ciśnienie wewnętrzne $p = 3$ MPa, $k_r = 120$ MPa, $E = 2.1 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0.3$.

Rozwiązanie. W miejscach połączenia powłoki walcowej z dnami zbiornika powstają dodatkowo naprężenia od zginania, lecz dostatecznie daleko od den wpływ ten zanika i pozostaje tylko stan błonowy.

Naprężenia obwodowe σ_1 w stanie błonowym powłoki możemy wyznaczyć ze wzoru (19.1), kładąc $r_1 = r$ oraz $r_2 = \infty$

$$\sigma_1 = \frac{pr}{g} \quad (19.4)$$

Naprężenia wzdłużne σ_2 w powłoce walcowej wyznaczamy z warunku równowagi części zbiornika przeciętego płaszczyzną prostopadłą do jego osi wzdłużnej, otrzymując

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2g} \quad (19.5)$$

Obliczenie wymaganej grubości g płaszcza walczaka przeprowadzimy przy zastosowaniu hipotezy wytrzymałościowej τ_{max} . Naprężenia główne w danym przypadku wynoszą $\sigma_1 = 2\sigma_2$, zaś $\sigma_3 = 0$, przeto naprężenie zredukowane (ze wzoru 9.3)¹⁾ wynosi

$$\sigma_{red} = \sigma_1 \leq k_r$$

zatem

$$g \geq \frac{pr}{k_r} = \frac{3 \cdot 1000}{120} = 25 \text{ mm}$$

¹⁾ Stosując hipotezę Hubera (wzór 9.1), otrzymamy $\sigma_{red} = 0,866\sigma_1$

Wydłużenie względne w kierunku obwodowym (a zarazem i promieniowym) ε_1 oraz w kierunku wzdłużnym ε_2 zgodnie ze wzorami (3.3) wynoszą

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5}(120 - 0,3 \cdot 60) = 49 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) = \frac{1}{2,1 \cdot 10^5}(60 - 0,3 \cdot 120) = 11 \cdot 10^{-5}$$

Jednostkowy przyrost objętości walczaka wynosi więc

$$\Delta v = (1 + \varepsilon_1)^2(1 + \varepsilon_2) - 1 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1^2\varepsilon_2$$

Występujące w powyższym wyrażeniu iloczyny odkształceń – jako małe wyższego rzędu – odrzucamy, a wówczas

$$\Delta v = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2 \cdot 49 \cdot 10^{-5} + 11 \cdot 10^{-5} = 109 \cdot 10^{-5}$$

zatem przyrost objętości części walcowej zbiornika wynosi

$$\Delta V = V\Delta v = \pi r^2 l \Delta v = \pi \cdot 100^2 \cdot 400 \cdot 109 \cdot 10^{-5} = 13\,700 \text{ cm}^3$$

Zadanie 19.2. Walczak o średnicy $d = 1,2 \text{ m}$ i długości $l = 4 \text{ m}$ wykonany z blachy stalowej o grubości $g = 2 \text{ cm}$ został poddany działaniu nadciśnienia wewnętrznego $p = 4 \text{ MPa}$.

Obliczyć naprężenia w walczaku, powiększenie średnicy d oraz przyrost objętości walczaka.

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_1 = 120 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 60 \text{ MPa}, \quad \Delta d = 0,58 \text{ mm}, \quad \Delta V = 4,9 \text{ dm}^3$$

Zadanie 19.3. Walczak o średnicy $d = 2 \text{ m}$ i długości $l = 8 \text{ m}$ jest zamknięty płaskimi dnami.

Wyznaczyć minimalną grubość płaszcza, jeżeli ciśnienie w walczaku wynosi $p = 1,2 \text{ MPa}$, granica plastyczności materiału płaszcza $R_e = 240 \text{ MPa}$, wymagany zaś współczynnik bezpieczeństwa $n_e = 1,6$. Obliczyć również przyrost objętości walczaka, gdy $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, a $\nu = 0,3$.

ODPOWIEDŹ. Dla $k_r = 150 \text{ MPa}$ minimalna grubość płaszcza wynosi $g_0 = 8 \text{ mm}$; ze względu na korozję itp. przyjmujemy $g = 10 \text{ mm}$, wówczas $\sigma_1 = 120 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 60 \text{ MPa}$, $\Delta V = 27,4 \text{ dm}^3$.

Zadanie 19.4. Na rurę miedzianą o średnicy zewnętrznej $d = 20 \text{ cm}$ i grubości $g_1 = 3 \text{ mm}$ nałożono bez luzu i wcisku rurę stalową o grubości $g_2 = 4 \text{ mm}$. Dane: $E_m = 1,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $E_{st} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

Obliczyć:

a) naprężenia w miedzi i stali, jeżeli wewnątrz rury powstanie ciśnienie $p = 5 \text{ MPa}$.

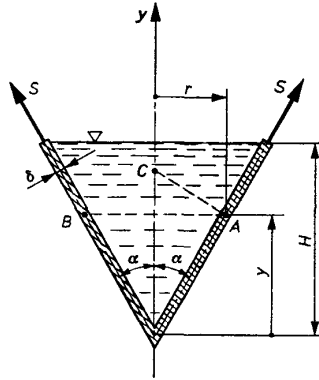
b) dopuszczalne ciśnienie p w rurze, jeżeli naprężenia dopuszczalne dla miedzi i stali wynoszą odpowiednio $k_m = 60 \text{ MPa}$, $k_{st} = 100 \text{ MPa}$.

ODPOWIEDŹ:

a) $\sigma_m = 47 \text{ MPa}$, $\sigma_{st} = 90 \text{ MPa}$

b) $p = 56 \text{ MPa}$

Zadanie 19.5. Wyznaczyć naprężenia w powłoce otwartego zbiornika stożkowego wypełnionego cieczą o ciężarze właściwym γ .



Rys. 19.2. Do zadania 19.5

Rozwiązanie. Naprężenia błonowe w powłokach osiowosymetrycznych, poddanych działaniu ciśnienia wewnętrznego p określone są wzorem (19.1), przy czym grubość powłoki często oznacza się literą δ , a promienie krzywizn: ρ_1 i ρ_2 .

W przekroju poprzecznym (poziomym) $A-B$ określonym współrzędną y (rys. 19.2) ciśnienie w cieczy wynosi $p = \gamma(H - y)$. Promienie krzywizn w tym przekroju wynoszą $r_1 = AC = y \tan \alpha / \cos \alpha$ oraz $r_2 = \infty$.

Po podstawieniu tych wartości do wzoru (19.1) znajdujemy

$$\sigma_1 = \frac{\gamma y (H - y) \tan \alpha}{\delta \cos \alpha}$$

Na dolną część zbiornika odciętą (w myśli) płaszczyzną AB działa ciśnienie p na powierzchni πr^2 , naprężenie σ_2 na powierzchni $2\pi r \delta$, działające wzdłuż tworzących stożka, oraz ciężar cieczy zawartej w dolnej części stożka, położonej poniżej płaszczyzny AB . Równanie rzutów tych sił na oś pionową ma postać

$$\Sigma P_y = \sigma_2 \cdot 2\pi r \delta \cos \alpha - p \pi r^2 - \frac{1}{3} \pi r^2 y \gamma = 0$$

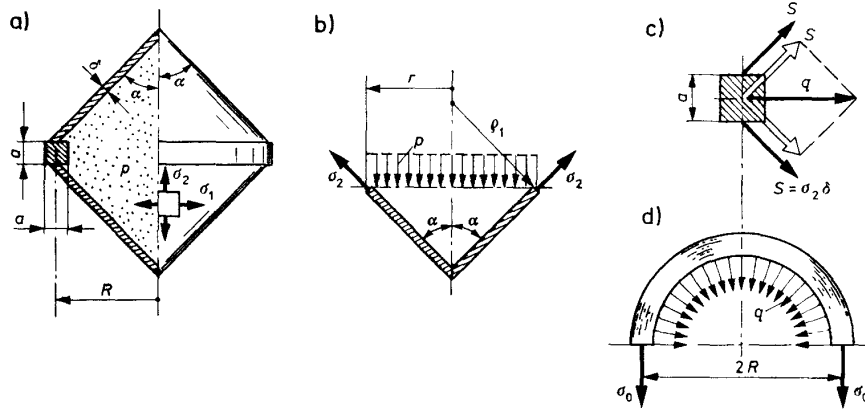
Stąd

$$\sigma_2 = \frac{\gamma y (H - \frac{2}{3} y) \tan \alpha}{2 \delta \cos \alpha}$$

Największe naprężenia w zbiorniku występują w tym przekroju, gdzie naprężenia σ_1 osiągają maksimum. Z przyrównania do zera pochodnej σ_1 względem y znajdujemy, że dzieje się to dla $y = \frac{1}{2}H$ i w tym przekroju odpowiednie naprężenia wynoszą

$$\sigma_1 = \frac{\gamma H^2 \operatorname{tg} \alpha}{4\delta \cos \alpha}, \quad \sigma_2 = \frac{\gamma H^2 \operatorname{tg} \alpha}{6\delta \cos \alpha} = \frac{2}{3}\sigma_1, \quad \sigma_{red} = \frac{\sqrt{7}\gamma H^2 \operatorname{tg} \alpha}{12\delta \cos \alpha} \leq k_r$$

Zadanie 19.6. Obliczyć największe naprężenia zredukowane, jakie wystąpią w ścianie zbiornika utworzonego z dwóch stożków przyspawanych do pierścienia o przekroju kwadratowym $\square$ a i promieniu R (rys. 19.3a), gdy ciśnienie w zbiorniku wynosi p . Obliczyć również naprężenia w pierścieniu.



Rys. 19.3. Do zadania 19.6

Rozwiązanie. Dla dowolnego promienia r naprężenia obwodowe σ_1 obliczamy ze wzoru (19.1) dla $\rho_1 = r \operatorname{tg} \alpha / \sin \alpha$ oraz $\rho_2 = \infty$. Otrzymujemy $\sigma_1 = pr / \delta \cos \alpha$. Z warunku równowagi (rys. 19.3b)

$$\pi r^2 p = \sigma_2 \cos \alpha \cdot 2\pi r \delta$$

otrzymujemy

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2\delta \cos \alpha} = \frac{1}{2}\sigma_1$$

Naprężenie zredukowane obliczamy według hipotezy Hubera dla $\sigma_3 = 0$

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_1 \right)^2 + (\sigma_1 - 0)^2 + \left(\frac{1}{2}\sigma_1 - 0 \right)^2 \right]} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_1 = \frac{\sqrt{3}pr}{2\delta \cos \alpha}$$

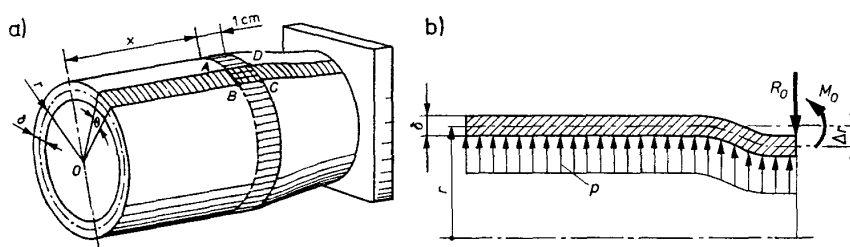
Największe napężenie zredukowane wystąpi dla $r = R$ i wynosi ono

$$\sigma_m = \frac{\sqrt{3}pR}{2\delta \cos \alpha}$$

Obciążenie pierścienia¹⁾ jest pokazane na rys. 19.3c i d. Pierścień znajduje się pod działaniem obciążenia ciągłego $q = 2S \sin \alpha$, gdzie $S = \sigma_2 \delta$ (rys. 19.3c), przy czym dla $r = R$, po podstawieniu wzoru na σ_2 , otrzymujemy $q = pR \tan \alpha$. Z warunku równowagi (rys. 19.3d) wynika, że napężenie obwodowe (ściskające) w pierścieniu wynosi

$$\sigma_0 = -\frac{pR^2 \tan \alpha}{a^2}$$

Zadanie 19.7. Cienką rurę kołową o grubości ścianki δ i promieniu średnim r przyspawano (przylutowano) do nieodkształcalnej (grubej) płyty (rys. 19.4). Wyznaczyć napężenia maksymalne i zredukowane w rurze pod działaniem ciśnienia wewnętrznego p .



Rys. 19.4. Do zadania 19.7

Rozwiązanie. Przyjmując założenie, że rura nie przenosi wzdłużnych naprężeń błonowych (lewy koniec rury jest zamknięty np. tłokiem) – pod działaniem ciśnienia wewnętrznego p powstaną w rurze napężenia obwodowe, określone wzorem (19.4)

$$\sigma_1 = \frac{pr}{\delta}$$

zatem przyrost promienia rury wynosi

$$f_1 = r \epsilon_r = r \frac{\sigma_1}{E} = \frac{pr^2}{E\delta} \quad (19.6)$$

¹⁾ Siły S , jakimi powłoki stożkowe działają na pierścień (odniesione do 1 cm bieżącego obwodu o promieniu R), dają wypadkową równą obciążeniu ciągłemu q . Na rysunku 19.6c pokazano równoległobok sił dających wypadkową q , przenosząc równolegle wektory sił S (zaznaczone cienką linią) do punktu przyłożenia wypadkowej, tj. obciążenia q .

W przekroju utwierdzenia działanie nieodkształcalnej płyty na rurę możemy zastąpić siłą R_0 i momentem M_0 (przypadającym na jednostkę obwodu). Wartość tych reakcji obliczymy z warunku ciągłości odkształceń (rys. 19.3).

Jednostkowa beleczka wycięta wzdłuż tworzącej rury zachowuje się jak belka na sprężystym podłożu o stałej sprężystej podłoża

$$k = \frac{E\delta}{r^2} \quad (19.7)$$

zatem zgodnie ze wzorem (13.6) otrzymamy

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4D}} = \sqrt[4]{\frac{E\delta}{4Dr^2}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{r^2\delta^2}} \quad (19.8)$$

przy czym sztywność EJ belki na sprężystym podłożu zastąpiono sztywnością D beleczki wyciętej z rury

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \quad (19.9)$$

Belka na sprężystym podłożu obciążona na końcu siłą poprzeczną i momentem była już rozpatrywana (zadanie 13.2), przeto dostosowujemy otrzymane tam wzory (13.11) oraz (13.12) do beleczki przedstawionej na rys. 19.7b. Z warunku utwierdzenia beleczki znajdujemy, że przyrost promienia Δr musi być zlikwidowany działaniem siły R_0 i momentu M_0 , zatem

$$f = \frac{1}{2\beta^2 D} \left(\frac{R_0}{\beta} - M_0 \right) = \Delta r = \frac{pr^2}{E\delta} \quad (19.10)$$

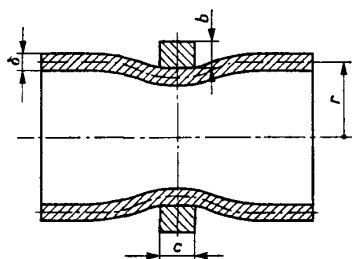
a kąt ugięcia θ od siły R_0 i momentów M_0 musi być równy zeru (wzór (13.12))

$$-\frac{1}{2\beta D} \left(2M_0 - \frac{R_0}{\beta} \right) = 0$$

Z powyższych równań znajdujemy

$$R_0 = 2\beta M_0 = p \sqrt[4]{\frac{r^2\delta^2}{2(1-\nu^2)}}, \quad M_0 = \frac{pr\delta}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}}$$

Zadanie 19.8. Na długą rurę cienkościenną o promieniu r i grubości δ nałożono (na gorąco) pierścieni o promieniu średnim a , grubości b i długości c , przy czym z założenia długość c jest mała (rys. 19.5). Wyznaczyć naprężenia maksymalne, jakie wystąpią w pierścieniu i rurze, jeżeli promień wewnętrzny pierścienia jest o e mniejszy od promienia zewnętrznego rury.



Rys. 19.5. Do zadania 19.8

Rozwiązanie. Niech P oznacza siłę, z jaką pierścień naciska na 1 cm obwodu rury. Strzałka ugięcia f_1 (zmniejszenie się promienia r) beleczki wyciętej z rury – zgodnie ze wzorem (13.7) – wynosi

$$f_1 = \frac{P\beta}{2k} = \frac{Pr^2}{2E\delta} \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{r^2\delta^2}} = \frac{Pr}{2E\delta} \sqrt[4]{\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 \cdot 3(1-\nu^2)}$$

Rozpatrzmy teraz odkształcenie pierścienia. Jeżeli na 1 cm obwodu pierścienia działa siła P , to ciśnienie, z jakim rura działa na pierścień, wynosi $p = P/c$. Odpowiada temu naprężenie obwodowe w pierścieniu

$$\sigma = \frac{pa}{b} = \frac{Pa}{bc} \quad (a)$$

przy czym

$$a = r + \frac{1}{2}(\delta + b)$$

oraz przyrost promienia

$$f_1 = a \frac{\sigma}{E} = \frac{Pa^2}{Ebc}$$

Wcisk promieniowy e zostanie usunięty częściowo przez odkształcenie rury, a częściowo przez powiększenie się średnicy pierścienia, przeto

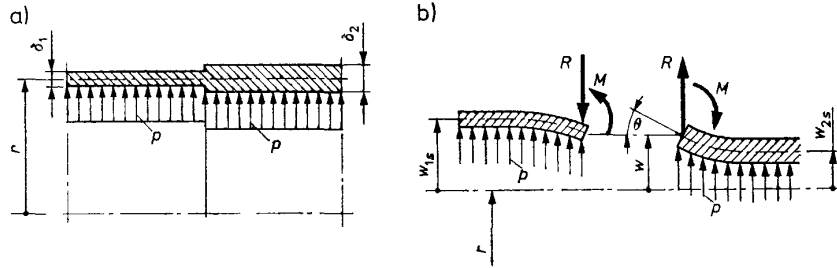
$$e = |f_1| + |f_2| = \frac{Pr}{2E\delta} \sqrt[4]{\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 \cdot 3(1-\nu^2)} + \frac{Pa^2}{Ebc}$$

Z powyższej zależności wyznaczamy P , a następnie naprężenia maksymalne w rurze ze wzoru (13.5)

$$\sigma_{max} = \frac{6M_{max}}{\delta^2} = \frac{6}{\delta^2} \frac{P}{4\beta} = \frac{3P}{2\delta^2} \sqrt[4]{\frac{r^2\delta^2}{3(1-\nu^2)}}$$

Naprężenia w pierścieniu określone są wzorem (a).

Zadanie 19.9. Rura o skokowo zmiennej grubości jest poddana działaniu wewnętrznego ciśnienia p (rys. 19.6a). Obliczyć, jakie siły wewnętrzne wystąpią w miejscu zmiany grubości ścianki.



Rys. 19.6. Do zadania 19.9

Rozwiązanie. Na skutek działania ciśnienia wewnętrznego swobodne odkształcenia promieniowe obu rur są różne i wynoszą

$$w_{1s} = \frac{pr^2}{E\delta_1} \text{ , oraz } w_{2s} = \frac{pr^2}{E\delta_2}$$

Aby zachowana była ciągłość odkształceń, w miejscu złączenia rur powstaną siły promieniowe R i momenty obwodowe M , jak to jest pokazane na rys. 19.6b. Odkształcenie promieniowe w w przekroju połączenia obu rur otrzymamy, uwzględniając ugięcia od siły R i od momentu M , określone wzorem (13.11), w którym sztywność zginania EJ belki na sprężystym podłożu zastąpimy sztywnością płytową D_1 i D_2 łączonych rur. Warunek równości odkształceń promieniowych w końców obu rur ma postać

$$\frac{pr^2}{E\delta_1} - \frac{R}{2\beta_1^3 D_1} - \frac{M}{2\beta_1^2 D_1} = \frac{pr^2}{E\delta_2} + \frac{R}{2\beta_2^3 D_2} + \frac{M}{2\beta_2^2 D_2}$$

Podobnie z warunku równości kątów θ (rys. 19.6b) na podstawie wzoru (13.12), otrzymujemy

$$\frac{R}{2\beta_1^2 D_1} + \frac{M}{\beta_1 D_1} = \frac{R}{2\beta_2^2 D_2} + \frac{M}{\beta_2 D_2}$$

przy czym

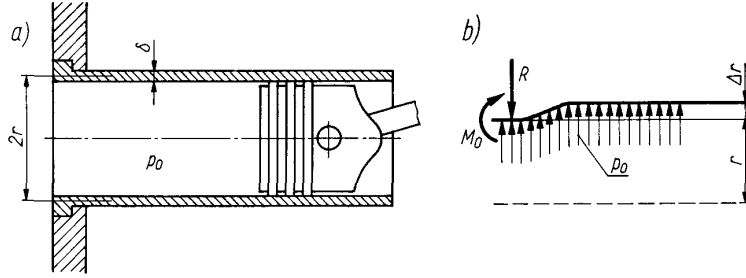
$$\beta_1 = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{r^2 \delta_1^2}}, \quad \beta_2 = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{r^2 \delta_2^2}}$$

$$D_1 = \frac{E\delta_1^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_2 = \frac{E\delta_2^3}{12(1-\nu^2)}$$

Z powyższych równań otrzymujemy

$$R = \frac{4pr^2(\delta_2 - \delta_1)\beta_1^2\beta_2^2(\beta_1 D_1 - \beta_2 D_2)}{E\delta_1\delta_2(\beta_2^2 - \beta_1^2)}, \quad M = R \frac{\beta_2^2 D_2 - \beta_1^2 D_1}{2\beta_1\beta_2(\beta_1 D_1 - \beta_2 D_2)}$$

Zadanie 19.10. Wyznaczyć naprężenia maksymalne, jakie wystąpią w cylindrze silnika spalinowego (rys. 19.7a), jeżeli maksymalne ciśnienie gazów wynosi p_0 .



Rys. 19.7. Do zadania 19.10

Rozwiązanie. Blok cylindrowy traktujemy jako nieodkształcalny. Rozwiązanie przeprowadzimy metodą superpozycji. Naprężenia obwodowe w cylindrze nie utwardzonym, poddanym działaniu ciśnienia p_0 , wynoszą

$$\sigma_0 = \frac{p_0 r}{\delta}$$

zatem przyrost promienia (według rys. 19.10)

$$\Delta r = \frac{\sigma_0}{E} r = \frac{p_0 r^2}{\delta E} \quad (a)$$

Ponieważ blok cylindrowy jest nieodkształcalny, przeto łączne działanie momentu utwardzenia M_0 , reakcji R oraz ciśnienia p_0 daje dla przekroju utwardzenia strzałkę ugięcia równą zero. Stosując wzory (a) oraz (13.11), otrzymujemy

$$\frac{p_0 r^2}{\delta E} - \frac{2R\beta}{k} + \frac{2M_0\beta^2}{k} = 0 \quad (b)$$

Podobnie kąt ugięcia w przekroju utwardzenia jest równy zero, przeto zgodnie ze wzorem (13.12) zachodzi związek

$$\frac{2R\beta^2}{k} - \frac{4M_0\beta^3}{k} = 0 \quad (c)$$

Z równań (b) i (c), po podstawieniu związków (19.3) i (19.4), wynika

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= \frac{p_0 r^2}{4\delta E} \frac{k}{\beta^2} = \frac{p_0 r^2}{4\delta E} \frac{E\delta}{r^2} \sqrt{\frac{r^2 \delta^2}{3(1-\nu^2)}} = \frac{p_0 r \delta}{4\sqrt{3(1-\nu^2)}} \\ R &= 2M_0 \beta = p_0 \sqrt[4]{\frac{r^2 \delta^2}{3(1-\nu^2)}} \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Równanie momentów gnących utworzymy przez podstawienie do równań (d) i (13.10) sztywności płytowej D oraz obliczonych wartości M_0 i R

$$M_{gx} = D \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{R}{\beta} e^{-\beta x} \sin(\beta x) + M_0 e^{-\beta x} [\cos(\beta x) + \sin(\beta x)]$$

Korzystając z tablic można wykonać – dla konkretnych danych liczbowych – wykres momentów gnących i dla wziętego z wykresu M_{gmax} obliczyć naprężenia maksymalne ze wzoru

$$\sigma_{max} = \frac{6M_{gmax}}{\delta^2}$$

Zadanie 19.11. Obliczyć naprężenia występujące w lufie armatniej o promieniu wewnętrznym $a = 57$ mm i zewnętrznym $b = 120$ mm, jeżeli ciśnienie w lufie wynosi $p = 200$ MPa.

Rozwiązanie. Zastosujemy wzory Lamé'go (19.2) dotyczące rur grubościennych. Podstawiamy $p_a = p$ oraz $p_b = 0$ i otrzymujemy:

– dla promienia $r = a$

$$\sigma_r = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) = \frac{200 \cdot 57^2}{120^2 - 57^2} \left(1 - \frac{120^2}{57^2} \right) = -200,0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_t = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) = \frac{200 \cdot 57^2}{120^2 - 57^2} \left(1 + \frac{120^2}{57^2} \right) = 316,7 \text{ MPa}$$

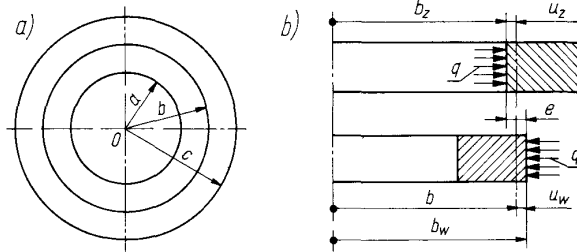
– dla promienia $r = b$

$$\sigma_r = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{b^2} \right) = 0$$

$$\sigma_t = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{b^2} \right) = \frac{200 \cdot 57^2}{120^2 - 57^2} \cdot 2 = +116,5 \text{ MPa}$$

Zadanie 19.12. Dwa pierścienie stalowe wykonano w ten sposób, że zewnętrzna średnica pierścienia mniejszego była o wielkość $e = 0,2$ mm większa od

wewnętrznej średnicy pierścienia większego (rys. 19.8a). Pierścień większy wciśnięto na mniejszy (lub zmontowano przez podgrzanie pierścienia zewnętrznego). Obliczyć wzajemny docisk pierścieni. Dane: $a = 10$ cm, $b = 17$ cm, $c = 25$ cm.



Rys. 19.8. Do zadania 19.12

Rozwiązanie. Interesujące nas wymiary układu w stanie przed montażem podano na rys. 19.8b. Po zmontowaniu pierścień promień b_w pierścienia wewnętrznego ulegnie skróceniu o u_w , natomiast promień b_z pierścienia zewnętrznego ulegnie powiększeniu o u_z , przy czym $u_z + |u_w| = e$. Wydłużenia promieni obliczamy ze wzoru (19.3), otrzymując

$$u_w = -\frac{qb}{E(b^2 - a^2)}[b^2(1 - \nu) + a^2(1 + \nu)]$$

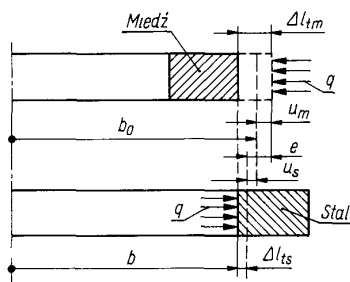
$$u_z = \frac{qb}{E(c^2 - b^2)}[b^2(1 - \nu) + c^2(1 + \nu)]$$

Po podstawieniu tych zależności do podanego wyżej wyrażenia na e otrzymujemy

$$q = \frac{Ee}{2b^3} \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}{(c^2 - a^2)} = \frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 0,2(170^2 - 100^2)(250^2 - 170^2)}{2 \cdot 170^3 \cdot (250^2 - 100^2)} = 51,7 \text{ MPa}$$

Zadanie 19.13. Pierścień stalowy o promieniu wewnętrznym b i zewnętrznym c nałożono bez luzu i wcisku na pierścień miedziany o promieniu zewnętrznym b i wewnętrznym a . Obliczyć wzajemny docisk pierścieni po ogrzaniu układu o Δt (stopni Celsjusza lub Kelvina), jeżeli moduły Younga wynoszą odpowiednio E_s i E_m , a współczynniki cieplnej rozszerzalności liniowej spełniają zależność $\alpha_m > \alpha_s$.

Rozwiązanie. Swobodne wydłużenie termiczne promienia b pierścieni wynosi (rys. 19.9) $\Delta l_{tm} = \alpha_m b \Delta t$ oraz $\Delta l_{ts} = \alpha_s b \Delta t$. Różnica wydłużeń $e = b \Delta t (\alpha_m - \alpha_s)$ musi być zlikwidowana dociskiem q , powodującym ściskanie pierścienia miedzianego i zmniejszenie jego promienia zewnętrznego o u_m . Równocześnie



Rys. 19.9. Do zadania 19.13

śnie pierścień stalowy będzie rozciągany i zwiększenie jego promienia wewnętrznego wyniesie u_s . Wspólny promień b po ogrzaniu wyniesie b_0 (jak to oznaczono na rys. 19.9), zatem $u_s + |u_m| = e$.

Podobnie jak w zadaniu poprzednim, ze wzoru (19.3) otrzymujemy

$$u_m = \frac{-qb}{E_m(b^2 - a^2)} [b^2(1 - \nu_m) + a^2(1 + \nu_m)],$$

$$u_s = \frac{qb}{E_s(c^2 - b^2)} [b^2(1 - \nu_s) + c^2(1 + \nu_s)]$$

Po podstawieniu tych wyrażeń do omówionego wyżej warunku ciągłości przemieszczeń $u_s + |u_m| = b\Delta t(\alpha_m - \alpha_s)$ otrzymujemy

$$q = \frac{E_m E_s \Delta t (\alpha_m - \alpha_s) (b^2 - a^2) (c^2 - b^2)}{E_s (c^2 - b^2) [b^2(1 - \nu_m) + a^2(1 + \nu_m)] + E_m (b^2 - a^2) [b^2(1 - \nu_s) + c^2(1 + \nu_s)]}$$

Zagadnienia dynamiczne

20

Wprowadzenie

Uwzględnienie zagadnień dynamicznych w obliczeniach wytrzymałościowych elementów maszyn i konstrukcji ograniczono do sił odśrodkowych występujących w ruchu obrotowym układu dookoła stałej osi oraz do obliczenia okresu drgań własnych układów o jednym stopniu swobody.

W przypadku gdy układ obraca się ze stałą prędkością kątową ω dookoła stałej osi, to na punkt o masie m tego układu, położony w odległości r od osi obrotu, działa siła odśrodkowa (bezwładności)

$$P = mp_n = mr\omega^2 \quad (20.1)$$

gdzie p_n – przyspieszenie dośrodkowe (normalne).

Okres drgań własnych T ciała o masie m zawieszonego na lekkiej konstrukcji sprężystej (pręt, belka, kratownica itp.) jest określony wzorem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{f_{st}}{g}} \quad (20.2)$$

gdzie: f_{st} – wydłużenie (przy rozciąganiu) lub ugięcie (przy zginaniu) konstrukcji wywołane statycznie działającą siłą $Q = mg$, g – przyspieszenie ziemskie.

W przypadku ciała zamocowanego na końcu lekkiego pręta, którego drugi koniec jest utwierdzony, okres drgań skrętnych wyraża się wzorem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Bl}{GJ_0}} \quad (20.3)$$

gdzie: B – masowy moment bezwładności ciała względem osi obrotu, J_0 – moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta, G – moduł sprężystości postaciowej materiału pręta, l – długość pręta.

W zadaniach 20.14÷20.17 dotyczących wyznaczania maksymalnych naprężeń σ_d i ugięć f_d , powstałych w czasie uderzenia, zostały zastosowane wzory

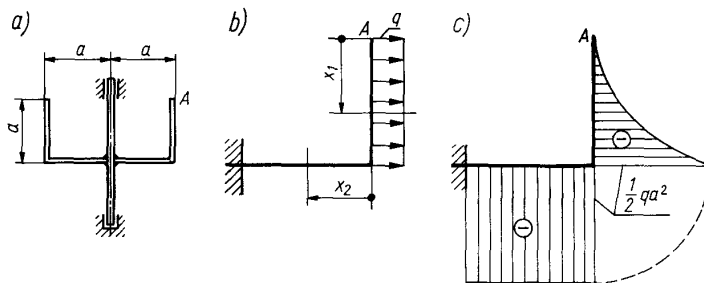
$$\sigma_d = \sigma_{st} K_d \quad \text{oraz} \quad f_d = f_{st} K_d$$

gdzie: K_d – współczynnik dynamiczny dla prętów (belek) lekkich wynosi

$$K_d = 1 + \sqrt{\frac{2h}{f_{st}}}$$

h – wysokość z jakiej spada swobodnie puszczone ciało o ciężarze Q , σ_{st} oraz f_{st} – naprężenia i ugięcia od statycznie przyłożonego ciała Q .

Zadanie 20.1. Wykonać wykres momentów gnących oraz obliczyć ugięcie punktu A , jeżeli rama, przedstawiona na rys. 20.1a, obraca się wokół osi, wykonując n obrotów na minutę.



Rys. 20.1. Do zadania 20.1

Rozwiązanie. W czasie ruchu rama jest obciążona siłami bezwładności, wynikającymi z działania przyspieszeń dośrodkowych. W prętach poziomych, prostopadłych do osi obrotu, siły bezwładności powodują rozciąganie, którego wpływ jest pomijalnie mały w porównaniu ze zginaniem występującym w prętach równoległych do osi obrotu. Jednostka długości pręta o masie m_j jest obciążona siłą bezwładności

$$q = m_j p_n = 1 F \rho \omega^2 a \quad \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

gdzie: F – pole przekroju poprzecznego pręta, ρ – gęstość materiału, ω – prędkość kątowa, 1/s

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \quad \frac{1}{\text{s}}$$

Momenty gnące wynoszą:

– dla $0 \leq x_1 \leq a$

$$M_g = -\frac{1}{2}qx^2 \begin{cases} \text{dla } x = 0, & M_g = 0 \\ \text{dla } x = a, & M_g = -\frac{1}{2}qa^2 \end{cases}$$

– dla $0 \leq x_2 \leq a$

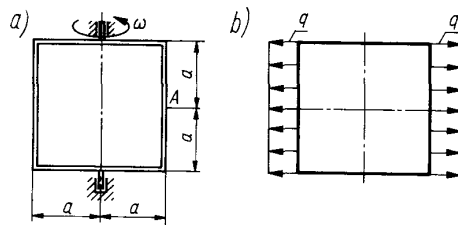
$$M_g = -\frac{1}{2}qa^2$$

Wykres momentów gnących jest pokazany na rys. 20.1c.

Ugięcie punktu a obliczamy metodą superpozycji, korzystając z tabl. 21.3.

$$f_A = \frac{qa^4}{8EJ} + \frac{1}{2}qa^2 \frac{a}{EJ} = \frac{qa^4}{EJ} \left(\frac{1}{8} + \frac{4}{8} \right) = \frac{5}{8} \frac{qa^4}{EJ}$$

Zadanie 20.2. Wyznaczyć ugięcie punktu A ramy (rys. 20.2a), która obraca się z prędkością kątową ω wokół osi.



Rys. 20.2. Do zadania 20.2

Rozwiązanie. Rama jest obciążona siłami bezwładności (rys. 20.2b). Obciążenie ciągłe ma wartość

$$q = 1F\rho\omega^2 a$$

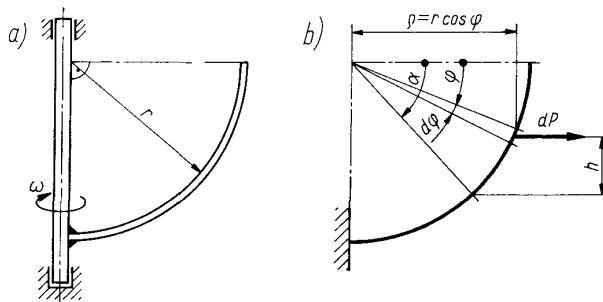
gdzie ρ – gęstość (masa właściwa).

Przemieszczenie punktu A można wyznaczyć np. metodą superpozycji (tabl. 21.3, poz. 6, 8 i 2). Otrzymujemy

$$f_A = \frac{qa^2}{8EJ}$$

Można również zastosować metodę energetyczną – jak w zadaniu 16.9, gdzie przyrost f wymiaru AB jest równy $2f_A$.

Zadanie 20.3. Obliczyć największą wartość momentu gnącego, który wystąpi w łuku przedstawionym na rys. 20.3a, jeżeli oś obraca się z prędkością kątową ω . Masa jednostki długości pręta wynosi m_j w kg/m. Wpływ ciężaru własnego pominąć.



Rys. 20.3. Do zadania 20.3

Rozwiązanie. Element łuku określony dowolnym kątem φ ma długość $ds = r d\varphi$ i jest obciążony siłą bezwładności $dP = dm p_n = m_j r d\varphi \omega^2 r \cos \varphi$.

Moment gnący w przekroju określonym kątem α wynosi (rys. 20.3b)

$$\begin{aligned} M_g(\alpha) &= \int_0^\alpha dPh = \int_0^\alpha m_j r d\varphi \omega^2 r \cos \varphi (r \sin \alpha - r \sin \varphi) = \\ &= m_j r^3 \omega^2 \left[\sin \alpha \int_0^\alpha \cos \varphi d\varphi - \int_0^\alpha \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \right] = \frac{1}{2} m_j r^3 \omega^2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Największy moment gnący występuje dla $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (w utwierdzeniu) i wynosi

$$M_{gmax} = \frac{1}{2} m_j r^3 \omega^2$$

Zadanie 20.4. Oś wiruje z prędkością kątową ω . Obliczyć największą wartość momentu gnącego, który wystąpi w pręcie o masie jednostki długości m_j w kg/m (rys. 20.4).

ODPOWIEDŹ. Największa wartość momentu gnącego występuje w utwierdzeniu i wynosi

$$M_g = \frac{1}{3} m_j \omega^2 l^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha$$

Zadanie 20.5. Sztywny wał obraca się z prędkością kątową ω (rys. 20.5). Obliczyć przemieszczenie promieniowe masy m , jeżeli sztywność zginania prętów wynosi EJ .

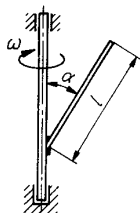
ODPOWIEDŹ:

$$f = \frac{m \omega^2 a^4}{EJ}$$

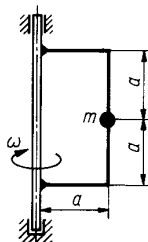
Zadanie 20.6. Rama wiruje z prędkością kątową ω (rys. 20.6). Obliczyć przemieszczenie promieniowe masy m , jeżeli sztywność zginania ramy wynosi EJ .

ODPOWIEDŹ:

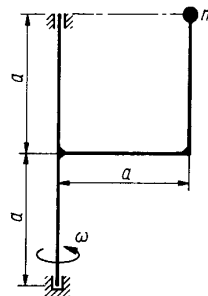
$$f = \frac{5m\omega^2 a^4}{3EJ}$$



Rys. 20.4. Do zadania 20.4



Rys. 20.5. Do zadania 20.5



Rys. 20.6. Do zadania 20.6

Zadanie 20.7. Do tarczy o masie m , ciężarze $Q = mg$ i promieniu r przyspawano dwa pręty o długości l i sztywności na zginanie EJ (rys. 20.7). Tarczę obrócono w jej płaszczyźnie o pewien kąt i swobodnie puszczone. Wyznaczyć okres drgań skrętnych tarczy.

Rozwiązanie. W chwili gdy tarcza jest obrócona od położenia równowagi o kąt φ , oprócz reakcji statycznej podpory dolnej (równej Q) pojawiają się reakcje R , których wartości obliczymy z warunku mówiącego, że muszą one wygiąć każdy pręt o strzałkę $f = \varphi(r+l)$, przy czym $f = Rl^3/3EJ$. Na tarczę odchyloną o kąt φ działa więc moment sił zewnętrznych

$$M = 2R(r+l) = \frac{6EJ}{l^3}(r+l)^2$$

Równanie dynamiczne ruchu obrotowego tarczy ma więc postać

$$B \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{6EJ}{l^3}(r+l)^2 \varphi$$

gdzie $B = \frac{Qr^2}{g \cdot 2}$ – masowy moment bezwładności krążka.

Stąd

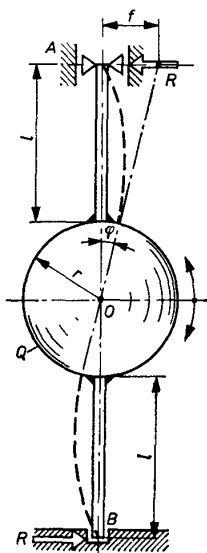
$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{6EJ}{Bl^3}(r+l)^2 \varphi = 0$$

Wprowadzamy oznaczenie $\alpha^2 = \frac{6EJ}{Bl^3}(r+l)^2$ i otrzymujemy równanie różniczkowe

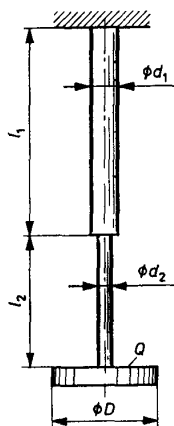
$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \alpha^2 \varphi = 0$$

Okres drgań układu wynosi

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi l}{r+l} \sqrt{\frac{Bl}{6EJ}}$$



Rys. 20.7. Do zadania 20.7



Rys. 20.8. Do zadania 20.8

Zadanie 20.8. Obliczyć okres drgań skrętnych krążka o masie $m = Q/g$ i średnicy D , utwierdzonego na końcu pręta o zmiennej średnicy d_1 i d_2 i długości l_1 i l_2 (rys. 20.8).

Rozwiązanie. Obracamy krążek o kąt φ . Moment skręcający wywierany przez pręt wynika z zależności

$$\varphi = \frac{M_s}{G} \left(\frac{l_1}{J_{01}} + \frac{l_2}{J_{02}} \right)$$

gdzie

$$J_{01} = \frac{\pi d_1^4}{32}, \quad J_{02} = \frac{\pi d_2^4}{32}$$

Okres drgań skrętnych wynosi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Bl}{GJ_0}}$$

Wystarczy więc do zależności tej podstawić wyrażenie podane w nawiasach zamiast ilorazu l/J_0 . Wzór na okres drgań układu ma postać

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{B}{G} \left(\frac{l_1}{J_{01}} + \frac{l_2}{J_{02}} \right)}$$

gdzie moment bezwładności krążka $B = \frac{QD^2}{8g}$.

Zadanie 20.9. Tarczę o momencie bezwładności B osadzono na wale o sztywności skrętnej GJ_{01} i GJ_{02} (rys. 20.9). Wyznaczyć okres drgań skrętnych układu.

Rozwiązanie. Obracamy tarczę o kąt φ_0 i puszczamy swobodnie. W położeniu określonym kątem φ dolna część wału działa na tarczę momentem skręcającym M_{s1} , górna zaś momentem M_{s2} , wynikającym z zależności $M_s = M_{s1} + M_{s2}$, zatem

$$\varphi = \frac{M_{s1}a}{GJ_{01}} = \frac{M_{s2}a}{GJ_{01}} + \frac{M_{s2}a}{GJ_{02}}$$

Stąd

$$M_s = M_{s1} \frac{J_{01} + 2J_{02}}{J_{01} + J_{02}}$$

$$\varphi = \frac{M_s a}{GJ_{01}} \left(\frac{J_{01} + J_{02}}{J_{01} + 2J_{02}} \right)$$

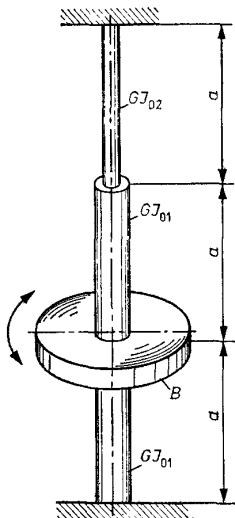
Z równania ruchu $B \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -M_s$ znajdujemy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Ba}{GJ_{01}} \left(\frac{J_{01} + J_{02}}{J_{01} + 2J_{02}} \right)}$$

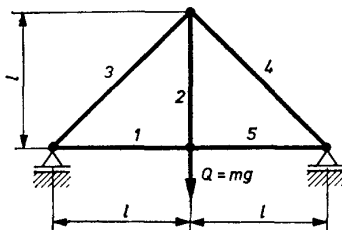
Zadanie 20.10. Obliczyć okres małych drgań kratownicy, pokazanej na rys. 20.10, obciążonej ciałem o masie m i ciężarze $Q = mg$. Sztywność na rozciąganie wszystkich prętów przyjąć jednakową i równą EF . Wpływu masy własnej prętów na okres drgań nie uwzględniać.

Rozwiązanie. Siły w prętach wynoszą $S_1 = S_5 = \frac{1}{2}Q$, $S_2 = Q$, $S_3 = S_4 = -Q/\sqrt{2}$. Statyczna strzałka ugięcia punktu przyłożenia siły Q (z twierdzenia Castigliana) wynosi

$$f_{st} = \frac{\partial V}{\partial Q} = \frac{1}{EF} \left[2 \frac{Q}{2} \frac{l}{2} + Ql + 2 \left(-\frac{Q}{\sqrt{2}} \right) \left(-\frac{l}{\sqrt{2}} l \sqrt{2} \right) \right] = \left(\sqrt{2} + \frac{3}{2} \right) \frac{Ql}{EF}$$



Rys. 20.9. Do zadania 20.9



Rys. 20.10. Do zadania 20.10

Wzór na okres małych drgań własnych układu ma postać

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f_{st}}{g}} = 2\pi \sqrt{\left(\sqrt{2} + \frac{3}{2}\right) \frac{Ql}{gEF}}$$

Zadanie 20.11. Obliczyć okres drgań własnych pionowych masy m umieszczonej między sprężynami o stałych c_1 i c_2 .

Rozwiązanie. Ciężar $Q = mg$ spowoduje odkształcenie obu sprężyn o jednakową strzałkę f . Siła w górnej sprężynie $S_1 = fc_1$ jest rozciągająca, a w dolnej $S_2 = fc_2$ – ściskająca, przy czym $Q = mg = S_1 + S_2 = f(c_1 + c_2)$.

Ponieważ statyczna strzałka ugięcia wynosi

$$f_{st} = \frac{mg}{c_1 + c_2}$$

zatem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f_{st}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}}$$

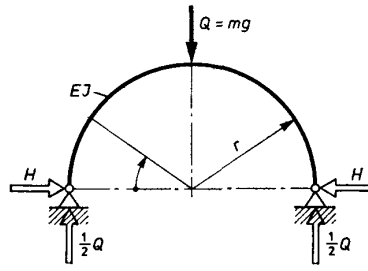
Zadanie 20.12. Obliczyć okres drgań pionowych układu pokazanego na rys. 20.12.

Rozwiązanie. Statyczną strzałkę ugięcia obliczymy metodą energetyczną.

W przedziale $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$ moment gnący wynosi



Rys. 20.11. Do zadania 20.11



Rys. 20.12. Do zadania 20.12

$$M_g = \frac{1}{2}Qr(1 - \cos \varphi) - Hr \sin \varphi$$

zatem

$$\frac{\partial M_g}{\partial H} = -r \sin \varphi, \quad \frac{\partial M_g}{\partial Q} = \frac{1}{2}r(1 - \cos \varphi)$$

Stosując twierdzenie Menabrei

$$\frac{\partial V}{\partial H} = 0 = \frac{2}{EJ} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\frac{1}{2}Qr(1 - \cos \varphi) - Hr \sin \varphi \right] (-r \sin \varphi) r d\varphi$$

znajdujemy $H = Q/\pi$, a z twierdzenia Castigliana otrzymamy

$$\begin{aligned} f_{st} = \frac{\partial V}{\partial Q} &= \frac{2}{EJ} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\frac{1}{2}Qr(1 - \cos \varphi) - Hr \sin \varphi \right] \frac{1}{2}r(1 - \cos \varphi) r d\varphi = \\ &= \frac{2r^3}{EJ} \left[Q \left(\frac{3}{16}\pi - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4}H \right] = \frac{Qr^3}{EJ} \left(\frac{3}{8}\pi - 1 - \frac{1}{2\pi} \right) \approx 0.019 \frac{Qr^3}{EJ} \end{aligned}$$

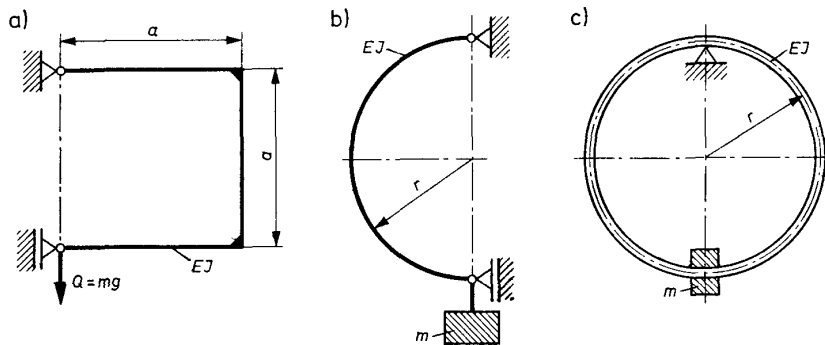
Okres małych drgań własnych układu wynosi więc

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f_{st}}{g}} = 2\pi \sqrt{0.019 \frac{mr^3}{EJ}}$$

Zadanie 20.13. Obliczyć okres małych drgań pionowych dla układów pokazanych na rys. 20.13a, b i c.

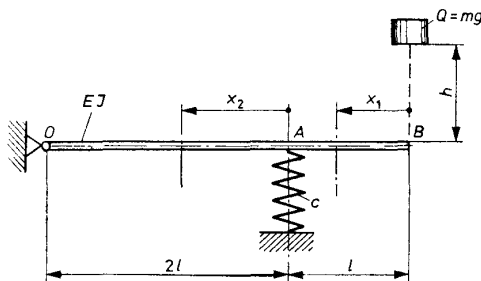
ODPOWIEDŹ:

$$\text{a) } T = 2\pi \sqrt{\frac{5}{3} \frac{ma^3}{EJ}}, \quad \text{b) } T = \pi \sqrt{2\pi \frac{mr^3}{EJ}}, \quad \text{c) } T = \pi \sqrt{(\pi - 8) \frac{mr^3}{EJ}}$$



Rys. 20.13. Do zadania 20.13

Zadanie 20.14. Ciało o masie m i ciężarze $Q = mg$ spada z wysokości h na koniec B lekkiej belki o sztywności EJ . Wyznaczyć ugięcie dynamiczne f_d końca B belki, jeżeli stała sprężyny wynosi c .



Rys. 20.14. Do zadania 20.14

Rozwiązanie. Przy statycznym działaniu siły Q siła w sprężynie wynosi $S = \frac{3}{2}Q$. Momenty gnące w belce wynoszą:

– w przedziale $0 \leq x_1 \leq l$

$$M_g = Qx, \quad \frac{\partial M_g}{\partial Q} = x$$

– w przedziale $0 \leq x_2 \leq 2l$

$$M_g = Q(x+l) - \frac{3}{2}Qx = Q(l - \frac{1}{2}x), \quad \frac{\partial M_g}{\partial Q} = l - \frac{x}{2}$$

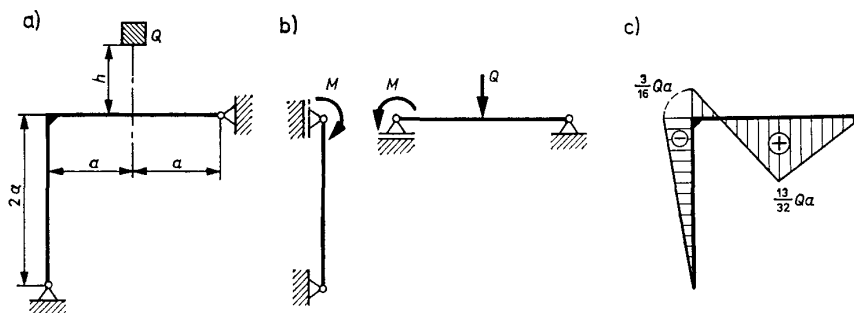
Ugięcie statyczne punktu B (według twierdzenia Castigliana) jest równe

$$f_{st} = \frac{\partial V}{\partial Q} = \frac{1}{EJ} \left[\int_0^l Qx^2 dx + \int_0^{2l} Q \left(l - \frac{x}{2} \right)^2 dx \right] + \frac{1}{c} \frac{3}{2} Q^{\frac{3}{2}} = \frac{Ql^3}{EJ} + \frac{9Q}{4c}$$

a ugięcie dynamiczne

$$f_d = f_{st} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{st}}} \right) = \left(\frac{Ql^3}{EJ} + \frac{9Q}{4c} \right) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\frac{Ql^3}{EJ} + \frac{3Q}{4c}}} \right)$$

Zadanie 20.15. Obliczyć naprężenie dynamiczne σ_d w ramie pokazanej na rys. 20.15, na którą z wysokości h spada ciało o masie m i ciężarze $Q = mg$. Oba pręty ramy mają sztywność zginania EJ i wskaźnik wytrzymałości na zginanie W .



Rys. 20.15. Do zadania 20.15

Rozwiązanie. Rozcinamy ramę w narożu (rys. 20.15b) i z warunku ciągłości odkształceń

$$\frac{M \cdot 2a}{3EJ} = \frac{Q(2a)^2}{16EJ} - \frac{M \cdot 2a}{3EJ}$$

znajdujemy

$$M = \frac{3}{16} Qa$$

Wykres momentów gnących pokazano na rys. 20.15c. Największy statyczny moment gnący wynosi $M_{st} = \frac{13}{32} Qa$. Statyczną strzałkę ugięcia obliczymy metodą superpozycji

$$f_{st} = \frac{Q(2a)^3}{48EJ} - \frac{M(2a)^2}{16EJ} = \frac{23}{192} \frac{Qa^3}{EJ}$$

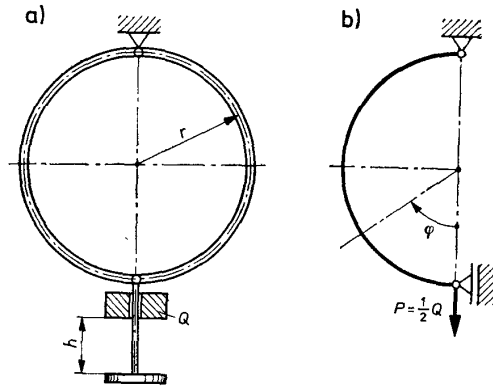
Współczynnik dynamiczny jest określony wzorem

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{384EJh}{23Qa^3}}$$

zatem

$$\sigma_d = \sigma_{st} K_d = \frac{M_{st}}{W} K_d = \frac{13Qa}{32W} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{384EJh}{23Qa^3}} \right)$$

Zadanie 20.16. Obliczyć odkształcenie dynamiczne f_d pierścienia pokazanego na rys. 20.16.



Rys. 20.16. Do zadania 20.16

Rozwiązanie. Rozcinamy pierścień wzdłuż pionowej osi symetrii i obliczamy ugięcie statyczne f_{st} układu pokazanego na rys. 20.16b.

Dla $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$M_g = Pr \sin \varphi, \quad \frac{\partial M_g}{\partial P} = r \sin \varphi$$

$$f_{st} = \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{EJ} \int_0^\pi Pr^3 \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi Pr^3}{2 EJ} = \frac{\pi Qr^3}{4 EJ}$$

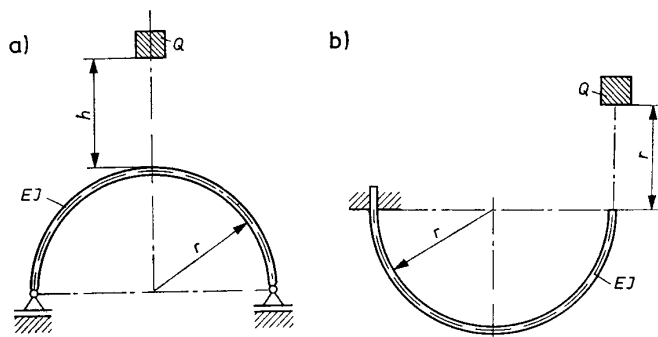
$$f_d = f_{st} K_d = \frac{\pi Qr^3}{4 EJ} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8EJh}{\pi Qr^3}} \right)$$

Zadanie 20.17. Obliczyć dynamiczną strzałkę ugięcia łuków pokazanych na rys. 20.17a i b.

ODPOWIEDŹ:

$$a) \quad f_d = \frac{Qr^3}{EJ} \left(\frac{3}{8}\pi - 1 \right) \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2hEJ}{Qr^3 \left(\frac{3}{8}\pi - 1 \right)}} \right]$$

$$b) \quad f_d = \frac{3\pi Qr^3}{2 EJ} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4EJh}{3\pi Qr^3}} \right)$$



Rys. 20.17. Do zadania 20.17

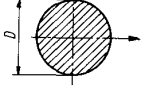
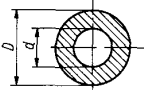
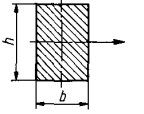
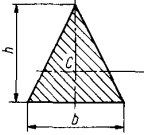
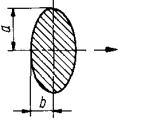
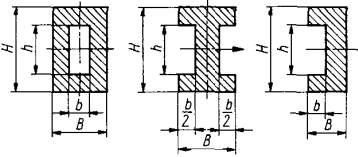
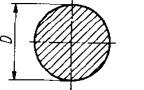
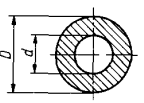
Tablice dodatkowe

21

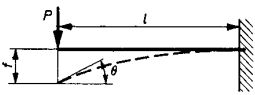
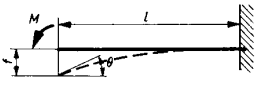
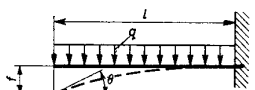
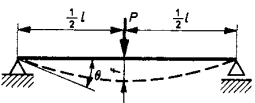
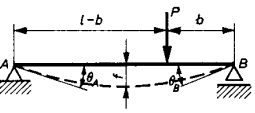
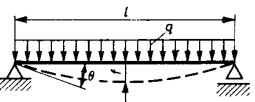
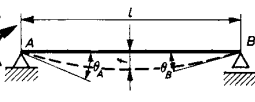
Tablica 21.1. Własności wytrzymałościowe i fizyczne niektórych materiałów

Materiał	Wytrzymałość na rozciąganie R_m MPa min	Granica plastycz- ności R_e MPa min	Moduł Younga E $\times 10^5$ MPa	Moduł sprężystości postaciowej G $\times 10^4$ MPa	Liczba Poissona ν	Współczynnik rozszerzalności liniowej α $\times 10^{-5} 1/1^\circ\text{C}$	Wydłu- żenie A_5 %	Gęstość ρ g/cm ³
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Stal konstrukcyjna St3	380	220	2,1	8,1	0,3	1,2	25	7,86
Stal sprężynowa	1800	1600	2,15	8,5	0,3	1,2	6	7,9
Stal nierdzewna	720	520	2,05	8,3	0,3	1,2	24	7,9
Żeliwo ZL250	250		1,1	4,2	0,25	1,05	0	7
Aluminium	100		0,7	2,7	0,34	2,4	4	2,7
Dural AK20	150					2,0	0,3	2,7
Miedź	210	70	1,1	4,6	0,32	1,7	38	9,0
Mosiądz 60 Cu	340		1,0	3,6	0,36	2,16	36	8,4
Drewno { grab sosna	107		0,11	0,055		0,2-0,5		0,9-1,2
Kauczuk	104		0,11	0,055				0,4-1,1
Beton	7-10		0,00008		0,47			0,9-1,2
Granit	$R_c = 35$ $R_c = 120$		0,20 0,49		0,17 0,25	1,2		2 2,7

Tablica 21.2. Momenty bezwładności J i wskaźniki wytrzymałości W niektórych figur

Lp	A. Przy zginaniu względem osi zaznaczonej na rysunku	
1		$J = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}, \quad W = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi D^3}{32}$
2		$J = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4)$ $W = \frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D} = \frac{\pi}{4} \frac{R^4 - r^4}{R}$
3		$J = \frac{bh^3}{12}, \quad W = \frac{bh^2}{6}$
4		$J = \frac{bh^3}{36}, \quad W = \frac{bh^2}{24}$
5		$J = \frac{\pi a^3 b}{4}, \quad W = \frac{\pi a^2 b}{4}$
6		$J = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$ $W = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$
B. Przy skręcaniu		
7		$J_0 = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}, \quad W_0 = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}$
8		$J_0 = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$ $W_0 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{R^4 - r^4}{R} \right) = \frac{\pi}{16} \left(\frac{D^4 - d^4}{D} \right)$

Tablica 21.3. Wartości strzałek i kątów ugięcia dla prostszych przypadków zginania belek¹⁾

Lp.	Schemat układu	Strzałka ugięcia	Kąt ugięcia
1		$f = \frac{Pl^3}{3EJ}$	$\theta = \frac{Pl^2}{2EJ}$
2		$f = \frac{Ml^2}{2EJ}$	$\theta = \frac{Ml}{EJ}$
3		$f = \frac{ql^4}{8EJ}$	$\theta = \frac{ql^3}{6EJ}$
4		$f = \frac{Pl^3}{48EJ}$	$\theta = \frac{Pl^2}{16EJ}$
5		$f = \frac{Pb}{48EJ}(3l^2 - 4b^2)$ dla $x = \frac{1}{2}l$	$\theta_A = -\frac{Pb}{6lEJ}(b^2 - l^2)$ $\theta_B = \frac{Pb(l-b)(2l-b)}{6lEJ}$
6		$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$	$\theta = \frac{ql^3}{24EJ}$
7		$f = \frac{Ml^2}{16EJ}$ dla $x = \frac{1}{2}l$	$\theta_A = -\frac{Ml}{3EJ}$ $\theta_B = \frac{Ml}{6EJ}$
8		$f = \frac{Ml^2}{8EJ}$	$\theta = \frac{Ml}{2EJ}$

¹⁾ Obszerniejszy zestaw wzorów znaleźć można w kalendarzach i poradnikach technicznych, jak również w pracy autorów: *Wzory, wykresy i tablice wytrzymałościowe*. Wyd. VI. Warszawa, WNT 1996

O książce

Podręcznik *Zadania z wytrzymałości materiałów* jest dostosowany do programów nauczania wytrzymałości materiałów na wydziałach mechanicznych wyższych uczelni technicznych. Tematyka zadań dotyczy głównie zagadnień spotykanych w budowie i eksploatacji maszyn oraz konstrukcji.

W każdym rozdziale zamieszczono krótkie wprowadzenie teoretyczne, pewną liczbę zadań szczegółowo rozwiązanych oraz zadania do samodzielnego rozwiązania. Wiele zadań zaczerpnięto z tematów egzaminacyjnych oraz z prac kontrolnych na studiach dziennych, wieczorowych i zaocznych.

Niniejszy zbiór zadań stanowi niezbędne uzupełnienie podręczników z wytrzymałości materiałów.

O Autorach

Profesorowie Michał Edward i Tadeusz Niezgodzińscy są autorami wielokrotnie wznawianego podręcznika *Wytrzymałość materiałów*, z którego korzystało kilka pokoleń studentów i inżynierów, oraz pracy *Wzory, wykresy i tablice wytrzymałościowe*.

Autorzy są pracownikami Politechniki Łódzkiej.

Cena 22,- zł

ISBN 83-204-2290-6



9 788320 422900 >